

الاحتمالات Probabilités

I- تعاريف ومصطلحات

- التجربة العشوائية هي التجربة التي أعيدت في نفس الظروف والشروط يمكن أن تعطي نتائج مختلفة.
- يمكن لتجربة عشوائية أن تتكون من عدة تجارب عشوائية تسمى اختيارات.
- مجموعة النتائج الممكنة لتجربة عشوائية ما تسمى كون الإمكانية نمرز لها بـ Ω .
- كل عنصر من Ω يسمى إمكانية.
- كل جزء من Ω يسمى حدثا.
- Ω يسمى الحدث الأكيد و $\emptyset$ الحدث المستحيل.
- كل أحادية ضمن Ω تسمى حدثا ابتدائيا.
- إذا كان A حدثا (ضمن Ω) فإن الجزء المتمم $\bar{A}$ للحدث A يسمى الحدث المضاد.
- نقول إن حدثين A و B غير منسجمين إذا كان $A \cap B = \emptyset$.

II- الفضاء الاحتمالي المنتهي

- لتكن Ω مجموعة منتهية . كل تطبيق P من $P(\Omega)$ نحو $[0,1]$ بحيث :
- أ - $P(\Omega) = 1$ ب- إذا كان $A \cap B = \emptyset$ فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ يسمى احتمالا على Ω
- الزوج $(\Omega; P)$ يسمى فضاء احتماليا منتهيا.



III- خصائص

- لكل A و B من $P(\Omega)$ $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- لكل A من $P(\Omega)$ لدينا $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$:

- لكل A و B من $P(\Omega)$ فإن: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

- لكل A و B من $P(\Omega)$ فإن: $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

- $P(\emptyset) = 0$

IV- حساب الاحتمالات

- إذا كانت كل الأحداث الابتدائية متساوية الاحتمال نقول إن مزود باحتمال

منتظم وفي هذه الحالة إذا كان $\Omega = \{\omega_1; \omega_2; \dots; \omega_n\}$ فإن $P(\omega_k) = \frac{1}{n}$ $1 \leq k \leq n$

- لكل A من $P(\Omega)$ فإن $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$

- ولكل A من $P(\Omega)$ بحيث $P(A) \neq 0$ فإن التطبيق P_A من $P(\Omega)$ نحو $\mathbb{R}$ بحيث:

$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ يسمى الاحتمال الشرطي بالنسبة لـ A .

- $P_A(B)$ هو احتمال الحدث B علما أن A محقق.

- نستنتج أن $P(A \cap B) = P_A(B) \cdot P(A)$ لكل A و B من $P(\Omega)$

- إذا كان $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ نقول إن الحدثان مستقلان

- إذا كان $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ نقول إن الحدثان A و B غير مستقلان.



V - المتغير العشوائي variable aléatoire

1. تعاريف ومصطلحات :

- ليكن (Ω, P) فضاء احتمالي منتهيا . كل تطبيق من Ω نحو $\mathbb{R}$ يسمى متغيرا عشوائيا على Ω ويرمز له بـ X أو Y أو Z
- نرمز بـ $X(\Omega)$ لمجموعة قيم التي يأخذها $X(\Omega) = \{X(\omega) / \omega \in \Omega\}$
- لكل عدد حقيقي a . الكتابة $(X = a)$ تعبر عن الحدث $(X \text{ يأخذ القيمة } a)$ أي $(X = a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = a\}$ وكذلك $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq a\}$
- 2. صورة احتمال بمتغير عشوائي :
- X متغير عشوائي ، التطبيق P' من $(X(\Omega))$ نحو $[0;1]$ بحيث لكل $A \subset X(\Omega)$. $P'(A) = P(X^{-1}(A))$ احتمال على $X(\Omega)$ ويسمى صورة الاحتمال P بـ X . عادة يرمز له بـ P

قانون احتمال متغير عشوائي X معرف على فضاء احتمالي منه هي الدالة

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow [0;1] \\ a \mapsto P(X = a) \end{cases}$$

- العدد $E(X) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i) \cdot x_i$ يسمى الأمل الرياضي.
- العدد $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ يسمى مفايرة المتغير العشوائي .
- العدد $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ يسمى الانحراف الطرازي.
- الدالة F بحيث $\forall a \in \mathbb{R}, F(a) = P(X \leq a)$ تسمى دالة التجزيء للمتغير العشوائي.

VI - التوزيع الحداني distribution binomiale

- التوزيع الحداني اذا كانت التجربة العشوائية تتمثل في إعادة نفس الاختيار العشوائي n مرة . لكل اختيار عشوائي نتيجتان إحداها احتمالا P يسمى نجاح والأخرى احتمالا $q = 1 - p$ يسمى فشل.
- إذا كان المتغير العشوائي X هو المحدد بعدد مرات الحصول على نجاح. نقول إن X متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p
- قانون احتمال متغير عشوائي حداني وسيطاه n و p هو : $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} ; (0 \leq k \leq n)$
- الأمل الرياضي $E(X) = n \cdot p$ المفايرة $V(X) = n \cdot p(1-p)$

