

التمرين الأول : (2 نقطة)

- نعتبر ثلاثة صناديق U و V و W .
 يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوسن و يحتوي كل صندوق من الصناديق U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين .
 نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W . إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تانيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تانيا كرتين .
 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟
 2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة ؟
 3- ليكن X المتغير الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة .
 - حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

0.5

0.5

0.75

0.75

0.5

التمرين الثاني : (2 نقطة)

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .
 نضع : $b_n = 2 \cdot 10^n + 1$ و $c_n = 2 \cdot 10^n - 1$
 1- بين أن $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما .
 ($a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)
 2- أوجد زوجا (x_n, y_n) من $\mathbb{Z}^2$ يحقق : $b_n x_n + c_n y_n = 1$

0.5

0.75

التمرين الثالث : (3.75 نقطة)

- نضع $J =]-1, 1[$
 I- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع : $a * b = \frac{a+b}{1+ab}$
 1- تحقق أن $1 + ab > 0$ $(\forall (a, b) \in J^2)$ ثم استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J .
 2- أ- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي .
 ب- بين أن $(J, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده .
 ج- بين أن $(J, *)$ زمرة تبادلية .
 II- نعتبر التطبيق f المعرفة على IR بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$
 1- بين أن الدالة f تقابل من IR نحو J .
 2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب)
 لكل عنصرين x و y من J نضع : $x \perp y = f(g(x) \times g(y))$
 - بين أن f تشاكل من $(K^*, \times)$ نحو $(J^*, \perp)$ حيث : $J^* = J - \{0\}$
 3- نذكر أن $(IR^*, \times)$ زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون $\perp$ توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في J .
 - بين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي .

0.5

0.25

0.5

0.5

0.5

التمرين الرابع : (3.25 نقط)

- I-1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث : $(\operatorname{Re}(a) > 0)$) 0.5
- 2-أ- حدد معيار وعمدة العدد العقدي $I+a$ 0.5
- ب- استنتج أن $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$ 0.25
- ج- تحقق أن : $(1+a)(1-a) = 1+i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $I-a$ 0.5
- II- في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و M و M' التي ألحاقها على التوالي هي a و $-a$ و z و z' ونفترض أن : $zz' + i = 0$ 0.5
- 1- لتكن N النقطة التي لحقها $\bar{z}$ مرافق z 0.25
- بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان
- 2-أ- بين أن $z' - a = i \frac{z - a}{az}$ 0.5
- ب- بين أنه إذا كان $z \neq -a$ فإن $z' \neq -a$ و $\frac{z' - a}{z' + a} = -\frac{z - a}{z + a}$ 0.5
- 3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية. 0.5
- بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

التمرين الخامس : (7.5 نقط)

- I- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$ 1
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$ 0.75
- 1- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1
- 2- أحسب $f'(x)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0, +\infty[$ 0.75
- 3- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة لعددية g_n المعرفة على $]0, 1[$ بما يلي : $g_n(x) = f(x) - x^n$ 0.25
- أ- بين أن الدالة g_n تناقصية قطعاً على المجال $]0, 1[$ 0.25
- ب- استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0, 1[$ بحيث : $f(\alpha_n) = (\alpha_n)^n$ 0.5
- ج- بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $g_n(\alpha_{n+1}) < 0$ 0.5
- د- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ تزايدية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75
- 4- نضع $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ 0.25
- أ- تحقق أن $0 < \alpha_1 \leq l \leq 1$ 0.25
- ب- تحقق أن : $h(\alpha_n) = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) حيث $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ 0.25
- ج- بين أن : $l=1$ 0.5
- د- استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = 0$ 0.25

II - 1 - أ- أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f(x)dx$ لكل x من IR_+^*	0.25
ب- باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن $(\forall x \in IR_+^*) \int_x^1 f(x)dx = 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x$	0.5
ج- استنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) والمستقيمات التي معادلاتها على التوالي : $x=1$ و $x=e^2$ و $y=0$.	0.25
2- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$	
أ- بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n \geq 2$ و $1 \leq k \leq n-1$ لدينا :	
$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$	
ب- بين أن : $(\forall n \in IN^*) \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt \leq u_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)dt$	0.5
ج- استنتج أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$	0.5

التمرين السادس : (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt$	
1- لكل x من $\mathbb{R}$ نضع : $k(x) = \int_1^x e^{-t^2} dt$	
أ- تحقق أنه لكل x من المجال $[0, +\infty[$ لدينا : $g(x) = -k(\sqrt{x})$	0.25
ب- بين أن الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	0.5
ج- أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تناقصية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$	0.5
2- أ- بين أن : $(\forall x \in IR_+^*) \frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$	0.75
ب- استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 وأعط تأويلاً هندسياً للنتيجة المحصل عليها.	0.5