

التمرين الأول : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

I - في الحلقة الواحدة $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ ، نعتبر المصفوفتين

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) أحسب A^2 و $I-A$ **0.75**

(2) استنتج أن A تقبل مقلوبا المطلوب تحديده. **0.5**

II - لكل عددين a و b من المجال $I =]1, +\infty[$ نضع : $a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2}$

(1) تحقق أن $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2 = (x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$ **0.25**

(2) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I **0.5**

(3) نذكر أن $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ زمرة تبادلية.

نعتبر التطبيق $\varphi : \mathbb{R}^{*+} \rightarrow I$
 $x \mapsto \sqrt{x+1}$

أ- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^{*+}, \times)$ نحو $(I, *)$ **0.5**

ب- استنتج بنية $(I, *)$ **0.25**

ج- بين أن المجموعة $\Gamma = \{\sqrt{1+2^m}/m \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية من $(I, *)$ **0.75**

التمرين الثاني : (3.5 نقطة) الجزءان I و II مستقلان

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

I - نعتبر في المجموعة C المعادلة $iz^2 + (2-i)az - (1+i)a^2 = 0$ حيث a عدد عقدي غير منعدم.

(1) حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) . **0.75**

(2) أ- تحقق أن : $z_1 z_2 = a^2(i-1)$ **0.25**

ب- بين أن : z_1, z_2 عدد حقيقي $\arg \equiv \frac{-3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right] \Leftrightarrow$ **0.5**

II - ليكن C عددا حقيقيا غير منعدم و z عددا عقديا غير منعدم.

نعتبر النقط A و B و C و D و M التي ألحاقها على التوالي هي : I و $I+i$ و C و ic و z .

(1) أ- بين أن : A و D و M مستقيمية $\Leftrightarrow (ic+1)z + (ic-1)\bar{z} = 2ic$ (لاحظ أن $(c = \bar{c})$) **0.5**

ب- بين أن : $(AD) \perp (OM) \Leftrightarrow (ic+1)z - (ic-1)\bar{z} = 0$ **0.5**

(2) ليكن h لحق النقطة H ، المسقط العمودي للنقطة O على (AD) .

أ- بين أن : $h - (1+i) = \frac{i}{c}(h-c)$ **0.75**

ب- استنتج أن : $(CH) \perp (BH)$ **0.25**

التمرين الثالث : (3 نقط)

نعتبر في Z^2 المعادلة $(E): 143x - 195y = 52$

- 1) أ- حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 143 و 195 واستنتج أن المعادلة (E) تقبل حولا في Z^2 0.5
 ب- علما أن الزوج $(-1, -1)$ حل خاص للمعادلة (E) ، حل في Z^2 المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل. 0.75
 2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و أولي مع 5 0.5
 بين أن لكل k من IN لدينا : $n^{4k} \equiv 1[5]$ 0.25
 3) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين غير منعدمين بحيث : $x \equiv y [4]$ 0.5
 أ- بين أن لكل n من IN^* لدينا : $n^x \equiv n^y [5]$ 0.5
 ب- استنتج أن لكل n من IN^* لدينا : $n^x \equiv n^y [10]$ 0.5
 4) ليكن x و y عددين صحيحين طبيعيين بحيث يكون الزوج (x, y) حلا للمعادلة (E) . 0.25
 بين أنه لكل n من IN^* ، العددين n^x و n^y لهما نفس رقم الوحدات في نظمة العد العشري.

التمرين الرابع : (5.5 نقطة)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على IR بما يلي : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ليكن (C_n) المنحنى الممثل للدالة f_n في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$ 0.5
 2) أ- ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_n) بجوار $-\infty$ 0.5
 ب- بين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y=x$ مقارب مائل للمنحنى (C_n) بجوار $+\infty$ ، و حدد الوضع النسبي للمنحنى (C_n) و (D) 0.5
 3) ادرس تغيرات الدالة f_n ثم ضع جدول تغيراتها . 0.75
 4) أنشئ المنحنى (C_3) (نأخذ $f_3(-1,5) = 0$ و $f_3(-0,6) = 0$ و $\ln 3 = 1,1$) 0.75
 5) أ- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن $\frac{e}{n} < \ln n$ 0.25
 ب- بين إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل بالضبط حلين x_n و y_n حيث : $x_n \leq -\ln n$ 1
 و $-\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0$
 ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_n$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n$ 0.5
 6) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases}$ 0.5
 أ- بين أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 . 0.25

ب- تحقق أن لكل $n \geq 3$: $g\left(\frac{-1}{x_n}\right) = \frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

ج- استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n}$ 0.25

التمرين الخامس : (3.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, 1]$ بما يلي : $F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$ لكل x من $]0, 1]$

(1) ليكن x من $[0, 1]$ بين أن لكل t من $[0, x]$ لدينا : $\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$ 0.25

(2) ليكن x من $]0, 1]$

أ- بين أن : $F(x) = \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt$ 0.5

ب- بين أن $\frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0.75

(3) استعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $[0, 1]$: $\int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt = \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0.75

(4) ليكن x من $]0, 1]$

أ- بين أن : $F'(x) = -\frac{4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t}\right)^2 dt$ 0.5

ب- بين أن $-\frac{4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$ (يمكنك استعمال نتيجة السؤال 1) 0.75

ج- بتطبيق مبرهنة التزايد على الدالة F في المجال $[0, x]$ بين أن : 0.75

$$-\frac{4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

د- استنتج أن الدالة F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 محددا عددها المشتق على اليمين في 0. 0.25