

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$

نعتبر التطبيق f الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_1(z_1)$ حيث : $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}z + \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

و التطبيق h الذي يربط النقطة $M(z)$ بالنقطة $M_2(z_2)$ حيث : $z_2 = 2z + 3i$ ونضع $F = h \circ f$

(1) حدد طبيعة كل من التطبيقين f و h وعناصرهما المميزة.

(2) نعتبر النقطتين $\Omega(i)$ و $A(a)$ حيث a عدد عقدي معلوم مخالف للعدد i .

ونضع : $B = F(A)$ و $C = F(B)$ و $D = F(C)$

أ- بين أنه إذا كانت النقطة $M'(z')$ هي صورة النقطة $M(z)$ بالتطبيق F فإن : $z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(z - i)$

ب- تحقق أن Ω هي النقطة الوحيدة التي تحقق : $F(\Omega) = \Omega$

(3) أ- حدد بدلالة العدد العقدي a الأعداد العقدية b و c و d ألحاق B و C و D على التوالي.

ب- بين أن Ω و A و D مستقيمات.

ج- بين أن Ω هو مرجع النظم المتزنة $\{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$

د- حدد مجموعة النقط $A(a)$ لكي تكون النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي.

التمرين الثاني :

نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعروف بما يلي : $x * y = x + y - 3xy$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$

(1) أ- تحقق أن : $(1 - 3x)(1 - 3y) = 1 - 3(x * y)$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$

ب- بين أن : $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}, *)$ زمرة تبادلية .

(2) أ- بين أن التطبيق φ الذي يربط كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ بالعدد الحقيقي غير منعدم $\varphi(x) = 1 - 3x$ تشاكل

تقابلي من $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}, *)$ نحو $(\mathbb{R}^*, \times)$

ب- بين أن : $\varphi^{-1}(\mathbb{R}_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$

ج- بين أن : $(]-\infty, \frac{1}{3}[, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}, *)$

(3) لكل x من المجموعة $\mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ ولكل n من $\mathbb{N}$ نضع $x^{(0)} = 0$ و $x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

أ- بين أن : $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$; $(\forall x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\})$

ب- استنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n حيث : $x \in \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ و $n \in \mathbb{N}$

(4) نزود المجموعة $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي T المعروف بما يلي : $xTy = x + y - \frac{1}{3}$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2)$

أ- بين أن : $(\mathbb{R}, T)$ زمرة تبادلية .

ب- بين أن : $(\mathbb{R}, T, *)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث :

يحتوي صندوق على أربع كرات : كرة بيضاء و ثلاث كرات حمراء غير قابلة للتمييز باللمس .

نسحب عشوائيا كرة من الصندوق ، نسجل لونها، ثم نعيدها إلى الصندوق .

نجري نفس التجربة لمرة متتالية إلى أن نحصل لأول مرة على كرتين متتابعتين من اللون نفسه و نوقف التجربة.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي رتبة السحبة التي توقفت فيها التجربة .

(1) أحسب احتمال كل حدث من الحدثين التاليين : $(X = 2)$ و $(X = 3)$

(2) ليكن k عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم .

أ- بين أن احتمال الحدث $(X = 2k)$ هو : $p_{2k} = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$

ب- بين أن احتمال الحدث $(X = 2k + 1)$ هو : $p_{2k+1} = \left(\frac{3}{16} \right)^k$

التمرين الرابع :

I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I =]-\frac{1}{2}, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+2x)}{x}; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases}$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد مهظم $(o, \vec{i}, \vec{j})$

(1) بين أن الدالة f متصلة في الصفر .

(2) لكل عدد حقيقي غير منعدم a من المجال I نعتبر الدالة العددية h_a للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال I بما يلي :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$$

أ- احسب $h_a(a)$ و $h_a(0)$ ، ثم استنتج أنه يوجد عدد حقيقي b مجصور بين 0 و a بحيث : $\frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$

ب- استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في الصفر وأن : $f'(0) = -2$

(3) أ- استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة x من $I - \{0\}$ وأن : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$ حيث : $g(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$

ب- بين أن : $g(x) < 0$; $(\forall x \in I - \{0\})$

ج- استنتج تغيرات الدالة f على المجال I .

(4) أ- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \rightarrow -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2}}} f(x)$ ، ثم أول النتيجة المحصل عليهما هندسيا.

ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1, 2]$ بحيث : $f(\alpha) = 1$

ج- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ $\alpha \approx 1,3$)

II- (1) نضع : $J = [1, \alpha]$; $\varphi(x) = \ln(1+2x)$; $(\forall x \in I)$

أ- بين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال I ، وأن : $0 < \varphi' \leq \frac{2}{3}$; $(\forall x \geq 1)$

ب- تحقق أن : $\varphi(\alpha) = \alpha$ وأن : $\varphi(J) \subset J$

(2) نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 1$ و $|\ U_n - \alpha | \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($\forall n \geq 0$) ;

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها.

III- نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال I بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

(1) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I ، ثم احسب $F'(x)$

ب- استنتج منحى تغيرات الدالة F على المجال I .

(2) أ- بين أن : $F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$ ($\forall x \geq 1$) ;

ب- استنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

(3) نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية l على اليمين في $-\frac{1}{2}$ ونعتبر الدالة $\bar{F}$ المعرفة على المجال $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\begin{cases} \bar{F}(x) = F(x) ; x \in I \\ \bar{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = l \end{cases} \quad \text{بما يلي :}$$

أ- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية بين أن : $F(x) - l \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$ ($\forall x \in I$) ;

ب- استنتج أن الدالة $\bar{F}$ غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $-\frac{1}{2}$.