

التمرين الأول : (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية و كاملة .

1- نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $x * y = x + y - 2$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2)$

أ- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . 0.5

ب- بين أن $(\mathbb{Z}, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . 0.25

ج- بين أن $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية . 0.5

2- نزود $\mathbb{Z}$ بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي : $xTy = xy - 2x - 2y + 6$; $(\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2)$

و نعتبر التطبيق f من $\mathbb{Z}$ نحو $\mathbb{Z}$ المعرف بما يلي : $f(x) = x + 2$; $(\forall x \in \mathbb{Z})$

أ- بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{Z}, \times)$ نحو $(\mathbb{Z}, T)$ 0.5

ب- بين أن : $(\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3) ; (x * y)Tz = (xTz) * (yTz)$ 0.25

3- استنتج من كل ما سبق أن $(\mathbb{Z}, *, T)$ حلقة تبادلية و واحدة . 0.75

4- أ- بين أن $xTy = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$ 0.25

ب- استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, T)$ كاملة . 0.25

ج- هل $(\mathbb{Z}, *, T)$ جسم ؟ (علل جوابك) . 0.25

التمرين الثاني : (3.5 نقطة)

I- ليكن a عددا عقديا غير منعدم .

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$; (E)

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$ 0.25

2- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) . 0.5

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

- نعتبر النقط A و B و M التي ألحاقها على التوالي a و $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$ و z

ليكن r الدوران الذي مركزه M و زاويته $\frac{\pi}{3}$

نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$ (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)

ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .

1- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . 0.5

2- أ- بين أن $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ 0.5

ب- بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي الأضلاع .	0.5
3- نفترض أن $M \neq B$ و $M \neq A$	
أ- بين أن $\frac{z-b_1}{z-a_1} = -\frac{z-b}{z-a} \times \frac{a}{b}$	0.5
ب- بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمات إذا وفقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة .	0.75
التمرين الثالث : (3 نقطة)	
الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 و التي تحقق الخاصية :	
$(R) : 3^n - 2^n \equiv 0[n]$	
1- نفترض أن n يحقق الخاصية (R) ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n	
أ- بين أن $3^n - 2^n \equiv 0[p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$	0.75
ب- بين أن $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$	0.5
ج- بين أنه يوجد زوج (a,b) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $an - b(p-1) = 1$	0.5
د- ليكن r و q باقي وخارج القسمة الاقليدية للعدد a على $p-1$	0.5
$(q \in \mathbb{Z} \text{ و } 0 \leq r < p-1 \text{ حيث } a = q(p-1) + r)$	
- بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$	
2- استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 يحقق الخاصية (R) .	0.75
مسألة : (10 نقطة)	
نعتبر الدالة العددية h المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $h(1) = 1$ و $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$ ($\forall x > 1$)	
الجزء الأول :	
1- أ- بين أن الدالة h متصلة على اليمين في I .	0.25
ب- بين أن $(\forall x > 1) ; \ln x < x - 1$ ثم استنتج أن الدالة h تناقصية قطعا على المجال $[1, +\infty[$	0.75
2- أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ وضع جدول تغيرات الدالة h	0.5
ب- استنتج أن : $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$	0.25
الجزء الثاني :	
نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1, +\infty[$ بما يلي : $g(1) = \ln 2$ و $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$ ($\forall x > 1$)	
وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة g في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$	

1-أ- تحقق أن : $(\forall x > 1); \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2$	0.25
ب- تحقق أن : $(\forall x > 1); g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$	0.25
ج- بين أن $(\forall x > 1); g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t - 1}{t \ln t} dt$	0.5
2-أ- بين أن $(\forall x > 1); (x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$	0.5
ب- استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في I .	0.5
ج- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$	0.75
3-أ- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]1, +\infty[$ وأن $(\forall x > 1); g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$	0.75
ب- استنتج أن $(\forall x \geq 1); 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g	0.5
ج- أنشئ المنحنى (C) .	0.5
الجزء الثالث :	
1- بين أن الدالة $k: x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من المجال $]1, +\infty[$ نحو المجال $]-\infty, \ln 2]$	0.5
2- استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1, +\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$	0.25
II- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $1 \leq u_0 < \alpha$ و $u_{n+1} = 1 + g(u_n)$ ($\forall n \geq 0$)	
1-أ- بين أن : $(\forall n \geq 0); 1 \leq u_n < \alpha$	0.5
ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .	0.5
ج- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة وأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$	0.75
2-أ- بين أن : $(\forall n \geq 0); u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $	0.5
ب- بين أن : $(\forall n \geq 0); u_n - \alpha \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n u_0 - \alpha $	0.5
ج- استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$	0.25