

التمرين الأول : (4 نقط) الجزء الأول و الثاني مستقلان

الجزء الأول :
في الحلقة الواحدة $(M_2(IR), +, \cdot)$ نعتبر المصفوفتين : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(نضع $A^0 = I$ و $A^1 = A$ و $A^2 = A \cdot A$ و $A^{n+1} = A^n \cdot A$ لكل n من IN)

1 - بين أن $A^{2k} = I$ ($\forall k \in IN$) 0.5

2 - بين أن المصفوفة A تقبل A^{-1} ينبغي تحديده. 0.5

الجزء الثاني : ليكن a عددا حقيقيا. 0.5

لكل x و y من المجال $I =]a, +\infty[$ نضع : $x * y = (x - a)(y - a) + a$

1 - أ- بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I . 0.5

ب- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي. 0.5

ج- بين أن $(I, *)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.5

2 - بين أن $(I, *)$ زمرة تبادلية. 0.5

3 - نعتبر التطبيق : $\varphi : I \rightarrow IR_+^*$

$$x \mapsto \frac{1}{x - a}$$

أ- بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو $(IR_+^*, \cdot)$ 0.5

ب- حل في المجموعة I المعادلة $x^{(3)} = a^3 + a$ حيث $x^{(3)} = x * x * x$ 0.5

التمرين الثاني : (2.5 نقط)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N = \frac{111}{1} \overbrace{11}^{2010 \text{ مرة}}$

1 - بين أن العدد N يقبل القسمة على 11 0.25

2 - أ- تحقق أن العدد 2011 أولي وأن $10^{2010} - 1 = 9N$ 0.75

ب- بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$ 0.5

ج- استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N 0.5

3 - بين أن العدد N يقبل القسمة على 22121 0.5

التمرين الثالث : (3.5 نقط)

الجزء الأول : ليكن m عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m): z^2 + [(1 - i)m - 4]z - im^2 - 2(1 - i)m + 4 = 0$$

1- تحقق أن العدد $z_1 = -m + 2$ حل للمعادلة (E_m)	0.5
2- ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m)	
أ- بين أن $z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$	0.5
ب- حدد قيمتي m بحيث $z_1 z_2 = 1$	1
الجزء الثاني : المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$	
نعتبر التطبيق S الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' - 1 = -(z - 1)$	
و الدوران R الذي مركزه النقطة Ω ذات اللق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة $M'' = R(M)$	
1- أ- بين أن التطبيق S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللق 1 .	0.25
ب- بين أن : $z'' = iz + 2$	0.25
2- نفترض أن النقطة M تخالف النقطة O أصل المعلم و لنكن A النقطة التي لحقها 2 .	
أ- أحسب $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$	0.5
ب- حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة .	0.5
التمرين الرابع : (6.5 نقط)	
الجزء الأول : دراسة الحلول الموجبة للمعادلة : $e^x = x^n$: (E) حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .	
نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{x}{\ln x}$; $x \neq 0$ $f(0) = 0$	
و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$	
1- تحقق أن لكل x من المجموعة $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$ لدينا $e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$	0.25
2- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .	0.5
3- احسب النهايات : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول هندسيا النتائج المحصل عليها	1.5
4- ادرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $]0, 1[$ و $]1, +\infty[$ ثم اعط جدول تغيراتها .	0.75
5- بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يتم زوج إحداثيتها .	0.5
6- أنشئ المنحنى (C) .	0.5
7- بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين a_n و b_n بحيث : $1 < a_n < e < b_n$	0.5
الجزء الثاني : دراسة تقارب المتتاليتين $(a_n)_{n \geq 3}$ و $(b_n)_{n \geq 3}$	
1- بين أن : $b_n \geq n$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n \geq 3}$	0.5
2- أ- بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0.5
ب- بين أن $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$ ($\forall n \geq 3$) ثم استنتج نهاية المتتالية $(a_n)_{n \geq 3}$	0.5
ج- بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e$	0.5

التمرين الخامس : (3.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$	
1- أ- بين أن : $(\forall x \geq 0) \quad 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$	0.5
ب- بين أن $e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad (\forall x \geq 1)$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$	0.5
2- بين أن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0; +\infty[$ وأن : $F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x) \quad (\forall x \geq 0)$	0.5
3- نعتبر الدالة العددية G المعرفة على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $\begin{cases} G(x) = F(\tan x); 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$	
أ- بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$	0.25
ب- بين أنه يوجد عدد حقيقي C من المجال $[0; +\infty[$ بحيث $F'(C) = 0$ وأن : $F(C) = \frac{1}{2C}e^{-2C^2}$	0.75
(يمكنك تطبيق مبرهنة رول (ROLLE) بالنسبة للدالة G على المجال $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$)	
4- نعتبر الدالة العددية H المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$	
أ- بين أن الدالة H تناقصية قطعاً على المجال $[0; +\infty[$	0.5
ب- استنتج أن العدد C وحيد ثم اعط جدول تغيرات الدالة F .	0.5