

التمرين الأول :

- (I) ليكن $E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$. لكل زوج (a, b) من E^2 ، نضع : $a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$
- (1) أ- تحقق أن لكل زوج (a, b) من E^2 : $a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$
 ب- استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .
 (2) بين أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية.
- (II) $M_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2. نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي. لكن F مجموعة المصفوفات من $M_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل
- $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} : \text{حيث } a \in E : \text{نضع } M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix}$$
- (1) أ- تحقق أن $A^2 = -2A$ وأن : $M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}}A$
 ب- بين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$
- (2) نعتبر التطبيق $\varphi : (E, \perp) \rightarrow (F, \times)$
 $a \rightarrow \varphi(a) = M(a)$
 أ- بين أن φ تشاكل تقابلي.
 ب- استنتج بنية $(F, \times)$.

التمرين الثاني :

- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(o, \vec{u}, \vec{v})$
- ليكن a عددا عقديا غير منعدم شكله الجبري هو : $a = \alpha + i\beta$ مع $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$
- (1) لتكن (H) مجموعة النقط M ذات اللحق Z بحيث : $Z^2 - \bar{Z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$
 أ- حدد (H) .
 ب- أنشئ (H) في حالة $a = 1+i$
- (2) لتكن (C) مجموعة النقط M ذات اللحق Z يحقق : $(Z - a)(\bar{Z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$
 أ- حدد (C)
 ب- أنشئ (C) في حالة $a = 1+i$
- (3) نعتبر في $\mathbb{C}$ ، النظام : $(S) \begin{cases} Z^2 - \bar{Z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \\ (Z - a)(\bar{Z} - \bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$
 ونضع : $u = Z - a$
 أ- بين أن النظام (S) تكافئ النظام : $(S') \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u + 2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \end{cases}$
 ب- نضع $a = re^{i\theta}$ حيث $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$

حدد بدلالة r و θ ألتقاطع نقط تقاطع (C) و (H)

استنتج أن تقاطع (C) و (H) يتضمن ثلاثة نقط هي رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث :

1- نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E): 195x - 232y = 1$

(أ) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 195 و 232

(ب) بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S = \{(163 + 232k; 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z}\}$

(ج) أوجد العدد الصحيح الطبيعي d الوحيد الذي يحقق : $0 \leq d \leq 232$ و $195d \equiv 1[232]$

2- بين أن 233 عدد أولي.

3- لتكن A مجموعة الأعداد الصحيحة الطبيعية المحصورة بين 0 و 232

نعتبر التطبيق f من A نحو A المعرفة بما يلي: مهما يكن a من A فإن $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{195} على 233.

نقبل أن : $(\forall a \in A \setminus \{0\}) a^{232} \equiv 1[233]$

أ- بين أنه لكل عنصرين a و b من المجموعة A ، إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $a = b$.

ب- ليكن a و b عنصرين من المجموعة A بحيث : $f(a) = b$ ، و حدد a بدلالة b .

ج- استنتج أن التطبيق f تقابل ثم حدد تقابله العكسي f^{-1}

التمرين الرابع :

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

1- بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $g(x) \geq 0$

2- بين أن $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{e^x - 1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x)$

2- بين أن الدالة f متصلة في 0.

3- أ- أحسب $f'(x)$ من أجل كل عنصر x من $\mathbb{R}^*$.

ب) استنتج تغيرات الدالة f .

4- نعتبر التكامل $J(x) = \int_0^x te^{-t} dt$ حيث x عدد حقيقي.

(أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$

(ب) بين أن لكل x من $\mathbb{R}$: $\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$

(ج) بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$

(د) استنتج أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $f'(0) = -\frac{1}{2}$

(5) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3} (e^x(x-2) + 2 + x)$

ب- ادرس إشارة $e^x(x-2) + 2 + x$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ج- استنتج أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $f''(x) > 0$

د- أنشئ (C).

III نعتبر المتتالية العددية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = 1$ و لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = f(u_n)$

1) بين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة : $f(x) = x$

2) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}^+$: $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

ب- بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ln 2|$

ج- استنتج أن المتتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متقاربة وحدد نهايتها.

IV) لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $x \neq 0$: $F(x) = \int_x^{2x} \frac{t}{e^t - 1} dt$; $F(0) = 0$

1) أ- بين أن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $\frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

ب- بين أن الدالة F متصلة في 0.

ج- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق في 0 وأن : $F'(0) = 1$

2) أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ وأن لكل x من $\mathbb{R}^*$: $F'(x) = \frac{3 - e^x}{e^x + 1} f(x)$

ب- ادرس تغيرات الدالة f .