

التمرين الأول : (3نقط)

نذكر أن $(M_2(IR). + .x)$ حلقة واحدة وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(M_2(IR). + .x)$ فضاء متجهي حقيقي .

لتكن V مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ حيث $(a;b) \in IR^2$

1 - بين أن V فضاء متجهي جزئي من $(M_2(IR). + .x)$ وحدد أساسا له . 0.75

2 - أ- بين أن V جزء مستقر من $(M_2(IR). + .x)$ 0.25

ب- بين أن $(V. + .x)$ حلقة واحدة تبادلية 0.5

3 - أ- أحسب $M_{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})} \times M_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})}$ 0.25

ب- هل الحلقة $(V. + .x)$ جسم ؟ 0.25

4 - لتكن X مصفوفة من V حيث $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix}$ مع $(a;b) \in IR^2$

أ- بين أن : $X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = O$ حيث O هي المصفوفة المنعدمة . 0.5

ب- نفترض أن : $a^2 - 4b^2 \neq 0$ 0.5

- بين أن المصفوفة X تقبل مقلوبا في V ينبغي تحديده .

التمرين الثاني : (4نقط)

ليكن u عددا عقديا يخالف $(I-i)$

1 - أ- أنشر $(iu - 1 - i)^2$ 0.25

ب- حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$ 0.75

2 - المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر .

نعتبر النقط $\Omega(2 - 2i)$ و $U(u)$ و $B((1 - i)u + 2)$ و $A((1 + i)u - 2i)$

أ- حدد لحق النقطة I منتصف القطعة $[AB]$ ثم حدد متجهة الإزاحة t التي تحول النقطة U إلى النقطة I . 0.5

ب- ليكن R الدوران الذي مركزه Ω وزاويته $(-\frac{\pi}{2})$ - بين أن $R(A) = B$ 0.5

ج- استنتج أن (ΩI) و (AB) متعامدان . 0.5

د- انطلاقا من النقطة U وضع طريقة لإنشاء النقطتين A و B . 0.75

3 - نضع $u = a(1 + a) - 2i$ حيث $a \in IR$

أ- حدد لحقي المتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AU}$ بدلالة a 0.5

ب- استنتج أن النقط A و B و U مستقيمية . 0.5

التمرين الثالث : (3نقط)

n عدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 4 .
لدينا ثلاث صناديق U_1 و U_2 و U_3 .
الصندوق U_1 يحتوي على كرة حمراء واحدة و $(n-1)$ كرة سوداء .
الصندوق U_2 يحتوي على كرتين حمراوين و $(n-2)$ كرة سوداء .
الصندوق U_3 يحتوي على ثلاث كرات حمراء و $(n-3)$ كرة سوداء .
نعتبر التجربة العشوائية التالية : نختار عشوائيا صندوقا من بين الصناديق الثلاثة ثم نسحب تانيا كرتين من الصندوق الذي وقع عليه الاختيار .
ليكن X المتغير العشوائي الحقيقي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

- 1 - حدد قيم المتغير العشوائي X . 0.25
- 2 - أ- بين أن احتمال الحدث $(X=2)$ يساوي : $\frac{8}{3n(n-1)}$ 0.75
ب- بين أن احتمال الحدث $(X=1)$ يساوي : $\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$ 0.75
ج - استنتج قانون احتمال المتغير العشوائي X . 0.5
- 3 - علما أننا حصلنا على كرتين حمراوين ، ما هو احتمال أن يكون قد تم من الصندوق U_3 ؟ 0.75

مسألة : (10 نقط)

I - نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR^+ بما يلي : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

- 1 - أ- أدرس تغيرات الدالة g . 0.5
ب- ضع جدول تغيرات الدالة g . 0.5
- 2 - أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[\ln 4 ; \ln 6]$ 0.5
(نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ $\ln 3 \approx 1,1$)
ب- ادرس إشارة $g(x)$ على IR^+ 0.5
- 3 - نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n})$ لكل n من IN 0.5
أ- بين أن $1 \leq u_n \leq \alpha$ لكل n من IN 0.5
ب- بين أن : $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ 0.25
ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً . 0.25
د- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.5

II — نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة على IR_+^* بما يلي : $f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ 1

2- أ- تحقق أن : $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)}$ 0.5

ب- بين أن $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{x^3}$ لكل x من IR_+^* ثم ضع جدول تغيرات الدالة f . 0.75

3- أنشئ (C) (نأخذ $\alpha \approx 1,5$) 0.5

III — نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$(\forall x > 0) F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt \text{ و } F(0) = -\ln(2)$$

1- أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، بين أن : $(\forall x > 0) F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ 0.5

ب- بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $e^{x \ln 2} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x \ln 2}$ 0.5

ج- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$ ثم استنتج أن الدالة F متصلة على اليمين في الصفر . 0.5

2- أ- بين أن لكل x من $]0, +\infty[$: $F(x) \leq \frac{1-e^x}{2x}$ 0.25

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0.25

3- بين أن F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وأن $(\forall x > 0) F'(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{e^x-1}{x} \right)^2$ 0.5

4- أ- ليكن x من المجال $]0, +\infty[$ 0.5

ب- بين أنه يوجد C من المجال $]0, x[$ بحيث : $F(x) - F(0) = -\frac{1}{2} x e^{2C}$ 0.75

(يمكنك استعمال مبرهنة التزايديات المنتهية مرتين)

ب- أثبت أن لكل x من $]0, +\infty[$: $-\frac{1}{2} e^{2x} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq -\frac{1}{2}$ 0.25

ج- استنتج أن قابلية للاشتقاق على اليمين في الصفر وأن : $F'_d(0) = -\frac{1}{2}$ 0.25