

التمرين الأول : (3 نقط)

- لكل n من $\mathbf{N}^*$ نضع $a_n = \frac{333 \dots 31}{n \text{ مرة}}$ (n مرة الرقم 3)
- 1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان . 0.5
 - 2- بين أن لكل n من $\mathbf{N}^*$: $3a_n + 7 = 10^{n+1}$ 0.5
 - 3- بين أن لكل k من $\mathbf{N}^*$: $10^{30k+2} \equiv 7[31]$ 0.75
 - 4- بين أن k من $\mathbf{N}^*$: $3a_{30k+1} \equiv 0[31]$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} 0.75
 - 5- بين أنه لكل n من $\mathbf{N}^*$ إذا كان $n \equiv 1[30]$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في $\mathbf{Z}^2$. 0.5

التمرين الثاني : (3.5 نقط)

- نذكر أن $(\mathbf{C}, +, \times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(R), +, \times)$ حلقة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ووحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- لكل a و b من R نضع $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbf{R}^2\}$
- 1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(R), +)$ 0.5
 - 2- أحسب $J^2 = J \times J$ حيث $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(R), \times)$ 0.75
 - 3- نعرف على $M_2(R)$ قانون التركيب الداخلي $*$ بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ونعتبر التطبيق φ من $\mathbf{C}^*$ نحو $M_2(R)$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (a و b عددا حقيقيان) بالصفوفة $M(a, b)$
 - أ- بين أن φ تشاكل من $(\mathbf{C}^*, \times)$ نحو $(M_2(R), *)$ 0.5
 - ب- نضع : $E^* = E - \{O\}$ بين أن : $\varphi(\mathbf{C}^*) = E^*$ 0.25
 - ج- بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية . 0.5
 - 4- بين أن : $(\forall (A, B, C) \in E^3) A * (B + C) = A * B + A * C$ 0.5
 - 5- استنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي . 0.5

التمرين الثالث : (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث : $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] - \left\{\frac{\pi}{4}\right\}$

1- نعتبر في المجموعة C المعادلة التالية : $(E) z^2 - \sqrt{2} e^{i\theta} z + e^{2i\theta} = 0$	
أ- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = (\sqrt{2} i e^{i\theta})^2$	0.25
ب- أكتب على الشكل المثلثي z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة C .	0.75
2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي أحاقها على التوالي I و $-I$ و $e^{i(0+\frac{\pi}{4})}$ و $e^{i(0-\frac{\pi}{4})}$ و $\sqrt{2} e^{i\theta}$	0.75
أ- بين أن المستقيمين (OA) و $(T_1 T_2)$ متعامدان .	0.5
ب- ليكن K منتصف القطعة $[T_1 T_2]$. بين أن النقطة O و K و A مستقيمية .	0.25
ج- استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1 T_2]$.	0.25
3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$	
أ- اعط الصيغة العقدية للدوران r .	0.25
ب- تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو : $b = \sqrt{2} e^{i\theta} + i$	0.5
ج- بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان .	0.25
4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $(-\vec{v})$	0.25
5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$.	0.25
التمرين الرابع : (8 نقط)	
I- نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}, & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$	
1- أ- بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$	0.5
ب- ادرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$	0.25
2- أ- بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$	0.25
ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$	0.25
ج- بين أن $(\exists \alpha \in]0, 1[) \quad f'(\alpha) = 0$	0.5
د- استنتج أن : $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$	0.5
II- نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t) dt$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم .	
1- أ- تحقق أن $(\forall t \in [1, +\infty[) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$	0.5
ب- بين أن $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$	1

(لاحظ أن : $F(x) = \int_0^1 f(t)dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$)	
ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .	1
2- أ- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$	0.5
ب- أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$	0.25
III- 1- أ- بين أن بين أن $-\ln t \leq \frac{1}{e}$ $(\forall t \in]0, +\infty[)$	0.5
ب- بين أن $f(t) \leq \frac{1}{e}$ $(\forall t \in [0, +\infty[)$	0.25
ج- استنتج أن : $F(x) < x$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$	0.25
2- تعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_0 \in]0, 1[$ و $u_{n+1} = F(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$	
أ- بين أن $u_n \in]0, 1[$ $(\forall n \in \mathbb{N})$	0.5
ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعاً ثم استنتج أنها متقاربة .	0.5
ج- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0.5
التمرين الخامس : (2 نقط)	
نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :	
$\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} , & x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$	
1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0, +\infty[$	0.5
2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0, +\infty[$ ، نضع $L(x) = \int_0^x g(t)dt$	
أ- بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0, +\infty[$	0.25
ب- أحسب $L(x)$ من أجل $x > 0$	0.25
ج- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$	0.5
3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع : $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$	
- بين أن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها .	0.5