

التمرين الأول : (3.5 نقط) (الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما) :

I- لكل x و y من المجال $G =]1, 2[$ نضع : $x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$
 1- بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G 0.5

2- نذكر أن $(R_+, \times)$ زمرة تبادلية .

نعتبر التطبيق f من R_+ نحو G المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$
 أ- بين أن f تشاكل تقابلي من $(R_+, \times)$ نحو $(G, *)$ 0.75

ب- استنتج أن $(G, *)$ زمرة تبادلية و حدد عنصرها المحايد . 0.5

II- نذكر أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ووحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(M_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ونضع : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1- أ- تحقق أن : $A^3 = O$ ثم استنتج أن A قاسم للصفر في الحلقة $(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ 0.5

ب- تحقق أن : $(A^2 - A + I)(A + I) = I$ ثم استنتج أن المصفوفة $A + I$ تقبل مقلوبا في 0.5

$(M_3(\mathbb{R}), +, \times)$ يتم تحديده .

2- لكل a و b من $\mathbb{R}$ نضع $M(a, b) = aI + bA$ ونعتبر المجموعة $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ 0.75

- بين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له .

التمرين الثاني : (3 نقط)

يحتوي صندوق على 3 كرات حمراء و 4 كرات سوداء لا يمكن التمييز بينها باللمس .

I- نسحب عشوائيا بالتتابع و بإحلال أربع كرات من الصندوق و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات السوداء المسحوبة من الصندوق .

1- حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X . 1

2- أحسب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X . 0.5

II- نقوم بالتجربة العشوائية التالية في 3 مراحل كالتالي :

المرحلة 1 : نسحب كرة من الصندوق ، نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق .

المرحلة 2 : نضيف إلى الصندوق 5 كرات لها نفس لون الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى .

المرحلة 3 : نسحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الكيس الذي أصبح يحتوي على 12 كرة بعد المرحلة الثانية .

نعتبر الأحداث التالية :

N : « الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى سوداء »

R : « الكرة المسحوبة في المرحلة الأولى حمراء »

E : « جميع الكرات المسحوبة في المرحلة الثالثة سوداء »

1- بين أن : $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$ 0.5

2- أحسب $p(E)$ 0.5

3- أحسب احتمال الحدث R علما أن E قد تحقق . 0.5

التمرين الثالث : (3.5 نقط)

I- ليكن a عددا عقديا يخالف 1 .

نعتبر في المجموعة C المعادلة ذات المجهول z : $2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$: (E)

1- بين أن : $z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$ و $z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i)$ هما حلتي المعادلة (E) . 0.5

2- نأخذ : $a = e^{i\theta}$ حيث $0 < \theta < \pi$

أ- بين أن : $a - 1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta+\pi}{2})}$ 0.5

ب- استنتج الشكل المثلثي لكل حل من الحلين z_1 و z_2 . 1

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد وممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

نفترض أن : $\text{Re}(a) < 0$ ونعتبر النقط $A(a)$ و $B(-i)$ و $C(i)$ و $B'(1)$

1- حدد لحقي كل من J و K منتصفي $[AC]$ و $[AB]$ على التوالي بدلالة a 0.5

2- ليكن r_1 الدوران الذي مركزه J وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و r_2 الدوران الذي مركزه K وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

- نضع $C' = r_1(C)$ و $A' = r_2(A)$ وليكن c' لحق C' و a' لحق A' .

- بين أن $a' = z_1$ و $c' = z_2$ 0.5

3- أحسب $\frac{a' - c'}{a - 1}$ ثم استنتج أن المستقيم (AB') ارتفاع في المثلث $A'B'C'$. 0.5

التمرين الرابع : (8.25 نقط)

1- لتكن f الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} & x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

أ- بين أن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0 ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 0.5

ب- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 (يمكنك استعمال النتيجة $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$) 0.5

ج- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وأن : $f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$; $(\forall x > 0)$ 0.5

د- ضع جدول تغيرات الدالة f .	0.5
2- لتكن F الدالة العددية المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ وليكن (C_F) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$	
أ- حدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e, +\infty[$	0.25
ب- بين أن $(\forall t \geq e) ; t \ln t \leq \sqrt{1+t^2} \ln^2 t \leq \sqrt{2} t \ln t$	0.5
ج- بين أن $(\forall t \geq e) ; \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2} \ln^2 t} dt \leq \ln(\ln x)$	0.75
د- استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$	0.5
هـ- بين أن (C_F) يقبل نقطتي انعطاف المطلوب تحديد أفصول كل واحدة منهما .	0.5
ز- أنشئ (C_F) . (نأخذ $F(1) \simeq 0,5$ و $F(\frac{1}{e}) \simeq 0,4$)	1
3- لكل x من $[0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = x - F(x)$	
أ- بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$ ثم أدرس تغيرات الدالة φ	0.75
ب- بين أنه لكل n من IN ، المعادلة $\varphi(x) = n$ تقبل حلا وحيدا α_n في المجال $[0, +\infty[$	0.5
ج- بين أن $\alpha_n \geq n$ ($\forall n \in IN$) ثم أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$	0.5
4- أ- بين أن $0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$ ($\forall n \geq 1$) (يمكنك استعمال مبرهنة التزايد المتناهية)	0.5
ب- أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$	0.5
التمرين الخامس : (1.75 نقط)	
لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$ و $v_n = \ln(u_n)$	
1- تحقق أن : $(\forall n \geq 1) ; v_n = n^2 (\ln(\arctan(n))) - \ln(\arctan(n+1))$	0.25
2- باستعمال مبرهنة التزايد المتناهية ، بين أن :	0.5
$(\forall n \geq 1)(\exists c \in]n, n+1[) ; v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$	
3- بين أن : $(\forall n \geq 1) ; \frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan(n)} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(1+n^2))\arctan(n+1)}$	0.5
4- أحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0.5