

الإمتحان الوطني الموحد للبيكالوريا - الدورة الإستعدادية 2006 (بتصرف)	Achamel.info	
التمرين الأول : نوزع بطريقة عشوائية أربع كرات غير قابلة للتمييز باللمس و مرقمة 1 و 2 و 3 و 4 على ستة أشخاص A و B و C و D و E و F . (كل شخص يمكنه أن يحصل على 0 أو 1 أو 2 أو 3 أو 4 كرات) (1) ماهو عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة ؟ (2) أحسب احتمال أن يحصل الشخص A على كرة واحدة على الأقل. (3) احسب احتمال الحدث التالي : «مجموع عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A »		0.5 0.5 1
التمرين الثاني : في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ ، نعتبر التطبيق f من $\mathbb{C}$ نحو $\mathbb{C}$ بحيث : $f(z) = \frac{1}{6}[(1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}]$ (I) - حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = 0$ (II) - نضع $z_0 = 1$ و $z_{n+1} = f(z_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$. ونرمز ب u_n لمعيار العددي العقدي z_n. (1) أ- بين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ب- استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة و احسب نهايتها. (2) لكل k من $\mathbb{N}$ نعتبر صورة العدد العقدي z_k . و لكل n من $\mathbb{N}$ نضع : $S_n = \sum_{k=0}^n OM_k = OM_0 + \dots + OM_n$ أ- بين أن $S_n \leq 3$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ب- بين أن المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ متقاربة . (حساب نهاية المتتالية $(S_n)_{n \geq 0}$ غير مطلوب) (III) - نضع $z = re^{i\theta}$ حيث $\theta \in]-\pi, \pi]$ و $r \in \mathbb{R}_+$ أ- بين أن : $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$ ب- بين أن النقط M_1 و M_2 و ... و M_n مستقيمية (n عنصر من $\mathbb{N}^*$)		0.5 0.5 1 0.5 0.5 1 0.5
التمرين الثالث : 1 - حل المعادلة : $(E); 7u + 4v = 1$, $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ 2 - ليكن (u_0, v_0) حل للمعادلة (E) ونضع : $x_0 = 7u_0 + 20v_0$ بين أن $x_0 \equiv 1[4]$ و $x_0 \equiv 5[7]$ 3 - حل في $\mathbb{Z}$ النظام : $\begin{cases} x \equiv 0[7] \\ x \equiv 0[4] \end{cases}$ 4 - استنتج حلول النظام : $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases}$ (S)		1 0.5 1 1

التمرين الرابع :	
(1) بين أن $(\forall t \in \mathbb{R}) \frac{(1+t)^2}{(1+t)^2(3+t)^2} = \frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2}$	0.25
(2) بين أن : $(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \int_0^\alpha \frac{t}{3+t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tan}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)$	0.5
(3) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0, \pi]$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x \frac{1+\sin u}{2+\cos u} du$	
أ- بين أن F دالة قابلة للاشتقاق على $[0, \pi]$	0.25
ب- باستعمال مكاملة بتغيير المتغير $t = \tan \frac{u}{2}$ ، بين أن : $(\forall x \in [0, \pi[) F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(3+t^2)} dt$	0.75
(نذكر أن : $\sin u = \frac{2t}{1+t^2}$ و $\cos u = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ حيث $t = \tan \frac{u}{2}$ و $u \in [0, \pi[$)	
ج- باستعمال السؤالين (1) و (2) ، بين أن :	0.75
$(\forall x \in [0, \pi[) F(x) = \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan}\left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{3+\tan^2 \frac{x}{2}}\right)$	
د- باستعمال اتصال الدالة F ، بين أن : $\int_0^\pi \frac{1+\sin u}{2+\cos u} du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$	0.5
التمرين الخامس :	
في كل التمرين n يرمز لعدد صحيح طبيعي أكبر أو يساوي 2.	
نعتبر f_n الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$	
ليكن (C_n) التمثيل المبياني للدالة f_n في معلم متعامد مهنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$	
(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$	0.5
ب- أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى (C_n) .	0.75
(2) أحسب $f'_n(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f_n	0.75
(3) بين أن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$	0.5
ب- بين أن : $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$	0.25
ج- بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) e^x \geq x + 1$ استنتج أن : $f_n(1) > 0$	0.75
د- بين أن : $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$	0.5
(4) أنشئ المنحنى (C_2) . (نأخذ $\alpha_2 \approx 0,6$)	0.5
(5) أ- بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر أو يساوي 2، لدينا :	0.5
$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1\right)$	
ب- استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$	0.5

ج- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة .	0.75
6) أ- باستعمال السؤال 3) د- ، بين أن $\frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	0.5
ب- استنتج أن : $\frac{\ln(n)}{n} < \alpha_n < \frac{2\ln(n)}{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	0.5
ج- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$.	0.25