

التمرين الأول : (3 نقط)

نذكر أن $(M, (IR), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية .

$$E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} / x \in IR \right\} \text{ نعتبر المجموعة}$$

1- بين أن E جزء مستقر في $(M, (IR), \times)$ 0.5

2- أ- بين أن التطبيق φ الذي يربط العدد الحقيقي x بالمصفوفة $M(x)$ تشاكل تقابلي من $(IR, +)$ نحو $(E, \times)$ 0.5

ب- استنتج أن $(E, \times)$ زمرة تبادلية . 0.5

ج- حدد $M^{-1}(x)$ مقلوب المصفوفة $M(x)$ حيث x عدد حقيقي . 0.5

د- حل في المجموعة E المعادلة $A^5 X = B$ حيث $A^5 = \frac{A \times A \times \dots \times A}{5 \text{ مرات}}$ و $B = M(12)$ و $A = M(2)$ 0.5

3- بين أن المجموعة $F = \{M(\ln(x)) / x \in IR_+^*\}$ زمرة جزئية للزمرة $(E, \times)$ 0.5

التمرين الثاني : (4 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1- نعتبر في المجموعة C المعادلة $z^2 - 4iz - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$ 0.5

أ- تحقق أن العدد العقدي $a = 1 + i(2 - \sqrt{3})$ حل للمعادلة (E) 0.5

ب- استنتج b الحل الثاني للمعادلة (E) . 0.5

2- أ- بين أن : $a^2 = 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$ 0.5

ب- أكتب العدد a على الشكل المثلثي . 0.75

3- نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي a و b و $c = 2i + 2e^{i\frac{\pi}{7}}$

لتكن الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$

أ- حدد ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (Γ) 0.5

ب- بين أن النقطتين O و C تنتميان للدائرة (Γ) 0.5

ج- بين أن العدد العقدي $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف 0.75

التمرين الثالث : (3 نقط)

يحتوي صندوق على 10 كرات بيضاء و كرتين حمراوين .

نسحب الكرات من الصندوق الواحدة تلو الأخرى بدون إحلال إلى أن نحصل لأول مرة على كل كرة بيضاء ثم نوقف

التجربة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات المسحوبة .

1- أ- حدد مجموعة قيم المتغير العشوائي X :

ب- أحسب احتمال الحدث : $(X = 1)$ 0.5

ج- بين أن : $p(X = 2) = \frac{5}{33}$ 0.5

د- أحسب احتمال الحدث : $(X = 3)$ 0.5

2- بين أن $E(X) = \frac{13}{11}$ (حيث $E(X)$ هو الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X) 0.5

ب- أحسب $E(X^2)$ ثم استنتج قيمة $V(X)$ (حيث $V(X)$ هو مغايرة المتغير العشوائي X) 0.75

مسألة : (10 نقط)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $I = [0, 1]$ بما يلي : $f(x) = \frac{1}{1 - \ln(1 - x)}$; $0 \leq x < 1$
 $f(1) = 0$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد مهيكل $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- بين أن الدالة f متصلة على اليسار في I . 0.5

2- أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليسار في I . 0.5

3- أدرس تغيرات الدالة f على المجال I ثم اعط جدول تغيراتها. 0.75

4- أ- بين أن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$ 0.75

ب- أنشئ المنحنى (C) مبرزا نصف مماسه في النقطة التي أفصولها 0 . (نأخذ $(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$) 0.5

5- بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال I يحقق : $f(\alpha) = \alpha$ 0.5

6- أ- بين أن الدالة f تقابل من المجال I نحو I . 0.25

ب- حدد $f^{-1}(x)$ لكل عنصر من المجال I . 0.5

II- نضع : $I_0 = \int_0^1 f(t) dt$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n : $I_n = \int_0^1 t^n f(t) dt$

1- بين أن المتتالية $(I_n)_{n \geq 0}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة . 0.75

2- بين أن $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ($\forall n \geq 0$) ثم حدد نهاية المتتالية $(I_n)_{n \geq 0}$ 0.75

III- لكل عدد حقيقي x من المجال $J = [0, 1[$ و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع :

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n F_k(x) \text{ و } F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt \text{ و } F_n(x) = \int_0^x t^n f(t) dt \text{ و } F_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

1- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in J) F(x) - S_n(x) = \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{(1-t)} dt$ 1

2-أ- بين أن الدالة $x \rightarrow (1-x)(1-\ln(1-x))$ تناقصية قطعاً على المجال J .	0.5
ب- استنتج أن الدالة $t \rightarrow \frac{f(t)}{1-t}$ تزايدية قطعاً على المجال $[0, x]$ مهما يكن x من المجال J .	0.5
3-أ- بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in J)$ $0 \leq F(n) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{1-x} \right)$	1
ب- استنتج أنه مهما يكن العدد x من المجال J لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$	0.5
4-أ- حدد $F(x)$ من أجل $x \in J$.	0.5
ب- حدد النهاية : $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$	0.25