

الثانوية التأهيلية محمد بن الحسن الوزاني - الخميسات -

المستوى : الثانية باكالوريا الشعبة : العلوم التجريبية جميع المسالك	الموضوع : درس اتصال دالة عددية	المادة : الرياضيات الأستاذ : علي الشريف
أ أهداف الدرس ■ تعرف اتصال دالة في نقطة . ■ تعرف اتصال دالة على اليمين و على اليسار في نقطة . ■ تعرف اتصال دالة على مجال . ■ التعرف على دالة الجزء الصحيح . ■ تعرف صورة مجال و صورة قطعة بدالة متصلة . ■ التمكن من تحديد صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعاً . ■ تعرف مبرهنة القيم الوسيطة و توظيفها في وضعيات مختلفة . ■ تطبيق النتائج المتعلقة بآتصال الدوال الحدودية و الجذرية و المثلثية , و العمليات على الدوال المتصلة . ■ تعرف آتصال مركب دالتين . ■ تعرف الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال . ■ التمكن من إنشاء منحنى الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً (انطلاقاً من منحنى الدالة f) ■ تعرف الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$. ■ توظيف خاصيات القوى الجذرية لعدد موجب .		
القدرات المنتظرة ■ تحديد صورة قطعة أ و مجال : - بدالة متصلة - بدالة متصلة و رتيبة قطعاً . ■ تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في دراسة بعض المعادلات و المترجمات أ و دراسة إشارة بعض التعابير . ■ استعمال طريقة التفرع الثنائي (la dichotomie) في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة $f(x) = \lambda$ أ و لتأطير هذه الحلول . ■ تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال , لإثبات و حدانية حل المعادلة $f(x) = \lambda$.		
المكتسبات القبلية ■ عموميات حول الدوال ■ المتتاليات العددية ■ نهاية دالة عددية ■ الاشتقاق و تطبيقاته .		
المحتوى 1 - الإتصال في نقطة - الإتصال على مجال . 2 - صورة مجال بدالة متصلة . 3 - العمليات على الدوال المتصلة . 4 - آتصال مركب دالتين متصلتين . 5 - الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال		
التوجيهات التربوية ■ يتم اعتماد التعريف التالي : نقول إن f دالة متصلة في نقطة x_0 إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. ■ تقبل النتائج المتعلقة بآتصال الدوال الحدودية و الجذرية و المثلثية و الدالة $\sqrt{x}$ و يتم التركيز على تطبيقها ■ نقبل أن صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة و أن صورة مجال هي أيضاً مجال ثم تستنتج مبرهنة القيم الوسيطة . ■ نقبل أن $f+g$ و $f.g$ و $\lambda.f$ و $f \circ g$ دوال متصلة على مجال I إذا كانت f و g متصلتين عل		
الإمتدادات ■ دراسة الدوال ■ المتتاليات ■ الحساب التكاملي ■ الإحصاء و الاحتمالات ■ العلوم الفيزيائية .		

(I) أنشطة تذكيرية :

(II) الإتصال :

(1) الإتصال في نقطة :

نشاط بنائي رقم 1 :

تعريف : f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 . f متصلة في $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. (الشكل)

تمرين تطبيقي رقم 1 :

(2) الإتصال على اليمين – الإتصال على اليسار :

نشاط بنائي رقم 2 :

تعريف : f دالة معرفة على مجال من الشكل $[x_0; x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$. (الشكل)

f متصلة على اليمين في النقطة $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$.

f دالة معرفة على مجال من الشكل $]x_0 - \alpha; x_0]$ حيث $\alpha > 0$. (الشكل)

f متصلة على اليسار في النقطة $x_0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = f(x_0)$.

خاصية : f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 تكون الدالة f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة يمين و يسار x_0 .

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-\pi; \pi[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 3x}{|\sin(x)|} \\ f(0) = -3 \end{cases}$$

(3) الإتصال على مجال :

نشاط بنائي رقم 3 :

تعريف : f متصلة على المجال $]a, b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $]a, b[$.

f متصلة على المجال $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a, b[$ و متصلة على يمين a و يسار b .

ملحوظة : نعرف بالمثل اتصال دالة على كل من المجالات $]a; b[$; $[a; b[$; $[a; +\infty[$; $]-\infty; a]$.

(4) اتصال الدوال الاعتيادية :

خاصية : f دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$

f دالة جذرية متصلة على كل مجال من مجموعة تعريفها .

الدالتان $x \rightarrow \cos(x)$ و $x \rightarrow \sin(x)$ متصلتان على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$.

الدالة $x \rightarrow \tan(x)$ متصلة على كل مجال من مجموعة تعريفها $D = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$.

(5) العمليات على الدوال المتصلة :

خاصية : ليكن I مجالا ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي .

f و g دالتين متصلتين على المجال I فإن الدوال $f + g$; $f \times g$; $k.f$ متصلة على I .

f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم في المجال I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان على I .

أمثلة : $f : x \rightarrow x^3 + 2x + \cos(x)$, $f : x \rightarrow \sqrt{x}(x^3 - 2x^2)$, $f : x \rightarrow \frac{2x-1}{x^2+1} \cos(x)$ متصلة على $\mathbb{R}$.

(6) اتصال مركب دالتين :

خاصية 1: لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$, وليكن a عنصرا من I إذا كانت f متصلة في a و g متصلة في $f(a)$ في فإن الدالة $g \circ f$ متصلة في a .

خاصية 2: لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$, إذا كانت f متصلة على I و g متصلة على J فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على I .

$$\text{أمثلة : } \leftarrow f(x) = \frac{x^5}{(x-1)^5} - \frac{3x^2}{(x-1)^2} \leftarrow f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

تمرين تطبيقي رقم 2 :

(7) دالة الجزء الصحيح :

تعريف : دالة الجزء الصحيح هي الدالة التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n الذي يحقق $n \leq x < n+1$. نرسم لصورة x بهذه الدالة بالرمز $E(x)$.

$$\text{أمثلة : } E(2,3) = 2; E(-2,5) = -3; E(\sqrt{3}) = 1; E(5) = 5$$

خاصية : $\leftarrow$ دالة الجزء الصحيح متصلة في كل عدد من $\mathbb{Z}$.

$\leftarrow$ دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في كل عدد k من $\mathbb{Z}$ و غير متصلة على يسار k .

(III) صورة مجال بدالة :

1 (صورة مجال بدالة متصلة :

خاصية : $\leftarrow$ صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

$\leftarrow$ صورة قطعة بدالة متصلة هي أيضا قطعة.

ملحوظة : إذا كانت f دالة متصلة على قطعة $[a, b]$. فإن $f([a, b]) = [m; M]$ حيث m هي القيمة الدنيا للدالة f و M هي القيمة القصوى للدالة f على المجال $[a, b]$.

2 (صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطاعا :

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطاعا على مجال I , لدينا النتائج التالية :

الصورة		المجال I
f تناقصية قطاعا على I	f تزايدية قطاعا على I	$[a; b]$
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$	$]a; b[$
$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$]a; b[$
$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right[$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$]a; b[$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right[$	$]a; b[$
$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right[$	$] -\infty; a[$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$]a; +\infty[$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\mathbb{R}$

تمرين تطبيقي رقم 3 :

(VI) مبرهنة القيم الوسيطة :

نشاط بنائي رقم 4 :

مبرهنة : إذا كانت f دالة متصلة على المجال $[a, b]$. فإن لكل عدد حقيقي λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$, يوجد على الأقل عدد حقيقي c من المجال $[a, b]$ بحيث : $f(c) = \lambda$. الشكل

نتيجة 1 : إذا كانت f دالة متصلة على قطعة $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في المجال $]a; b[$.

تمرين تطبيقي رقم 4 :

نتيجة 2 : إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a; b[$.

تمرين تطبيقي رقم 5 :

طريقة التفرع الثنائي :

لتكن f دالة متصلة بحيث المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]a; b[$.

لتحديد تأطير للعدد α سعته أصغر من أو يساوي عدد معلوم نتبع الخطوات التالية :

← نحسب $f(c_0)$ حيث c_0 مركز $[a, b]$, إذا كان $f(c_0) \times f(b) < 0$ فإن $\alpha \in [c_0; b]$ و إلا فإن $\alpha \in [a; c_0]$

← نحسب $f(c_1)$ حيث c_1 مركز المجال الجديد , ثم نحدد بنفس الطريقة مجالاً جديداً يحتوي على α .

← و هكذا نواصل حساب صورة مركز المجال المحصل عليه حتى نحصل على السعة المطلوبة.

مثال : نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f(x) = x^3 + x^2 + x - 2$ لنحدد تأطير سعته أصغر من 2×10^{-1} لحل المعادلة $f(x) = 0$.

(V) الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً :

نشاط بنائي رقم 5 :

تعريف : لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال I . و ليكن J صورة المجال I بالدالة f .

الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x) = y$, تسمى الدالة العكسية للدالة f .

و نرمز لها بالرمز f^{-1} .

نتائج : لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال I , و f^{-1} دالتها العكسية.

$$\left(\forall x \in f(I); f \circ f^{-1}(x) = x \right) \leftarrow \left(\forall x \in I; f^{-1} \circ f(x) = x \right) \leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(y) = x \\ y \in I \end{array} \right\}$$

خاصيات الدالة العكسية :

f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال I , و f^{-1} دالتها العكسية.

← f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$.

← f^{-1} رتيبة قطعاً على المجال $f(I)$ و لها نفس رتبة f على المجال I .

← منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل لمنحنى الدالة f بالنسبة لمستقيم الذي معادلته $y = x$ في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$. الشكل

تمرين تطبيقي رقم 6 :

دالة الجذر من الرتبة n :

تعريف : ليكن n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

الدالة العكسية للدالة المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي $x \rightarrow x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$.

← نرمز لصورة العدد x بهذه الدالة بالرمز $\sqrt[n]{x}$.

← العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x .

خاصية رقم 1 :

← الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعاً على $[0; +\infty[$, ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.

← في معلم متعامد ممنظم , منحنى الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ هو مماثل لمنحنى الدالة $x \rightarrow x^n$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y = x$.

نتائج :

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+); (\forall b \in \mathbb{R}^+); \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+); (\forall b \in \mathbb{R}^+); \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a > b$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+); (\sqrt[n]{a})^n = a; \sqrt[n]{a^n} = a$$

خاصيات :

ليكن n و m عنصرين من $\mathbb{N}^*$, و a و b عنصرين من $\mathbb{R}_+$:

$$\leftarrow \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b} .$$

$$\leftarrow \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \text{ مع } b \neq 0 .$$

$$\leftarrow \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \text{ مع } b \neq 0$$

$$\leftarrow \sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

$$\leftarrow \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً :

تعريف : ليكن x عددا حقيقيا موجبا قطعاً و r عددا جذريا غير منعدم .

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r العدد الذي نرمز له بالرمز x^r و المعروف بما يلي $x^r = \sqrt[r]{x^m}$ حيث $r = \frac{m}{n}$

(مع $m \in \mathbb{Z}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$)

خاصيات :

$$\leftarrow (\forall r \in \mathbb{Q}^*); (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); x^r > 0$$

$$\leftarrow (\forall x \in \mathbb{R}_+^*); (\forall m \in \mathbb{Z}^*); (\forall n \in \mathbb{N}^*); \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$$

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*); (\forall r, r' \in \mathbb{Q}^*)$$

$$\leftarrow x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad \leftarrow x^r \times y^r = (xy)^r \quad \leftarrow (x^r)^{r'} = x^{rr'} \quad \leftarrow \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\leftarrow x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad \leftarrow \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$$

تمارين تطبيقية 10-9-8-7 .

تمارين داعمة :