

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

أهداف الدرس

❖ تطبيق نتائج اتصال الدوال الحدودية و الجذرية و المثلثية و العمليات على الدوال المتصلة. ❖ تعرف اتصال مركب دالتين. ❖ تعرف الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال ❖ التمكن من إنشاء منحنى الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا انطلاقا من منحنى الدالة f. ❖ تعرف دالة الجذر المربع ❖ توظيف خاصيات القوى الجذرية لعدد موجب قطعا.	❖ تعرف اتصال دالة عددية في نقطة ❖ تعرف اتصال دالة على اليمين و على اليسار ❖ تعرف اتصال دالة على مجال ❖ التعرف على دالة الجزء الصحيح ❖ تعرف صورة مجال و صورة قطعة بدالة متصلة ❖ التمكن من تحديد صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا. ❖ تعرف مبرهنة القيم الوسيطة و توظيفها.
--	---

القدرات المنتظرة

❖ استعمال طريقة التفرع الثنائي في تحديد قيم مقربة لحلول المعادلة $f(x) = \lambda$ أو لتأطير هذه الحلول. ❖ تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في حالة دالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال لإثبات وحدانية حل المعادلة $f(x) = \lambda$	❖ تحديد صورة قطعة أو مجال: 1. بدالة متصلة. 2. بدالة متصلة و رتيبة قطعا ❖ تطبيق مبرهنة القيم الوسيطة في دراسة بعض المعادلات و المتراجحات أو إشارة بعض التعابير.
--	---

الامتدادات

❖ الحساب التكاملي ❖ الإحصاء و الاحتمالات ❖ العلوم الفيزيائية	❖ دراسة الدوال العددية ❖ المتتاليات العددية
--	--

فقرات الدرس

❖ اتصال مركب دالتين ❖ الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا على مجال.	❖ الاتصال في نقطة الاتصال على مجال ❖ العمليات على الدوال المتصلة ❖ صورة مجال بدالة متصلة.
--	---

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

(I)- الاتصال في نقطة – الاتصال على مجال

(1)- الاتصال في نقطة Continuité en un point

نشاط 01

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

■ بسط تعبير الدالة f ثم تحقق من أن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $x_0 \in I$
 نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 ، إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

تمرين

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

■ بين أن الدالة f متصلة في الصفر.

(2)- الاتصال على اليمين و الاتصال على اليسار continuité à droite – continuité à gauche

نشاط 02

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ x + 1, & x < 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

(1)- أنشئ في معلم متعامد ممنظم منحنى الدالة f .

(2)- أدرس اتصال الدالة f في الصفر.

تعريف

❖ لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $[x_0, x_0 + \alpha[$ ، حيث $\alpha > 0$
 نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 على اليمين ، إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

❖ لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من النوع $]x_0 - \alpha, x_0]$ ، حيث $\alpha > 0$
 نقول إن الدالة f متصلة في النقطة x_0 على اليسار ، إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

تمرين

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

(1) - بين أن : $\forall x \in \mathbb{R}^*, |f(x)| \leq |x|$

(2) - استنتج أن الدالة f متصلة في الصفر.

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I ، و $x_0 \in I$
 تكون الدالة f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كانت متصلة على اليمين و على اليسار في x_0

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

(3)- الاتصال على مجال Continuité sur un intervalle

تعريف

- ❖ نقول إن الدالة f متصلة على مجال مفتوح I ، إذا كانت متصلة في كل نقطة من I .
- ❖ نقول إن الدالة f متصلة على مجال $[a, b]$ ، إذا كانت متصلة على $]a, b[$ و متصلة في a على اليمين و في b على اليسار.

ملاحظة

نعرف بالمثل اتصال دالة عددية على المجالات $]a, b[$ و $[a, b[$ و $]a, +\infty[$ و $[a, +\infty[$ و $] -\infty, a[$ و $] -\infty, a]$.

خاصية: اتصال دوال عددية اعتيادية

الدوال الحدودية و الدوال الجذرية و الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ و الدالة $x \mapsto \cos x$ و الدالة $x \mapsto \sin x$ دوال متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها.

ملاحظة

قصور دالة متصلة هي دالة متصلة.

مثال

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x \geq 0 \\ \frac{x}{1+x^2}, & x < 0 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

- الدالة $x \mapsto x^2 - x$ متصلة على المجال $[0, +\infty[$ (لأنها قصور حدودية)
- الدالة $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ متصلة على المجال $] -\infty, 0[$ (لأنها قصور دالة جذرية)
- ولدينا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ و منه f متصلة في الصفر على اليسار و بالتالي f متصلة على $\mathbb{R}$.

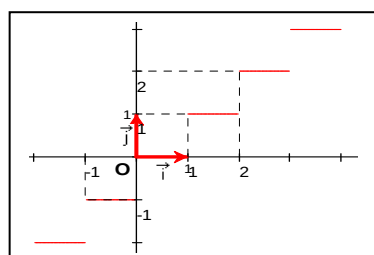
(4)- دالة الجزء الصحيح Fonction partie entière

تعريف

- ❖ $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z} / n \leq x < n+1$
- ❖ الدالة العددية التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد n تسمى دالة الجزء الصحيح و نكتب : $E(x) = n$ أو أيضا $[x] = n$.

نتائج

- ❖ $\forall x \in \mathbb{R}, E(x) \leq x < E(x) + 1$
- ❖ $\forall x \in \mathbb{R}, E(x+1) = E(x) + 1$
- ❖ $\forall n \in \mathbb{Z}, E(n) = n$
- ❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين في n و غير متصلة في n على اليسار لكل n من $\mathbb{Z}$.
- ❖ دالة الجزء الصحيح متصلة على المجال $[n, n+1[$ لكل n من $\mathbb{Z}$.
- ❖ $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in [n, n+1[, E(x) = n$



▪ منحنى دالة الجزء الصحيح

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

(II) - العمليات على الدوال المتصلة خاصية :

- ليكن I مجالا ضمن $\mathbb{R}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ❖ إذا كانت f و g دالتين متصلتين على I فإن الدوال $f + g$ و fg و λf دوال متصلة على I .
 - ❖ إذا كانت f و g متصلتين على I و g لا تنعدم على I فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ دالتان متصلتان على I .

أمثلة

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في الحالات التالية:

$$I = [0, +\infty[\text{ و } f(x) = x + \sqrt{x} \quad \diamond$$

$$I = \mathbb{R} \text{ و } f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2} \quad \diamond$$

$$I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ و } f(x) = \tan x \quad \diamond$$

تمرين

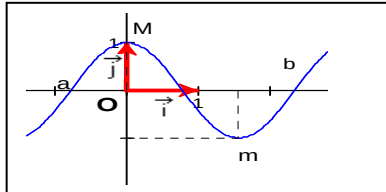
$$f(x) = \begin{cases} x + a, & x < 1 \\ 2x - 3, & 1 \leq x \leq 3 \\ bx + 1, & x > 3 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

حدد العددين a و b لكي تكون الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

(III) - صورة مجال بدالة متصلة Image d'un intervalle par une fonction continue

(1) - صورة قطعة - صورة مجال بدالة متصلة
خاصية



- ❖ صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة.
- ❖ صورة مجال بدالة متصلة هي مجال.

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن المجالين I و $f(I)$ ليسا من نفس الطبيعة دائما.

مثال مضاد

$$f(x) = x^2 \text{ و } I = [-1, 1[\text{ و } f(I) = [0, 1]$$

(2) - مبرهنة القيم الوسيطة Théorème des valeurs intermédiaires
خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال I ، و a و b عنصرين من I .
لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c محصور بين a و b بحيث $f(c) = k$

ملاحظة

إذا كانت f دالة متصلة على قطعة $[a, b]$ فإن: $f([a, b]) = [m, M]$ و $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ ولدينا:

$$m \text{ هي القيمة الدنيا للدالة } f \text{ على المجال } [a, b] \text{ و نكتب: } m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$M \text{ هي القيمة القصوى للدالة } f \text{ على المجال } [a, b] \text{ و نكتب: } M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

$$\forall \lambda \in [m, M], \exists c \in [a, b] / f(c) = \lambda \quad \diamond$$

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) f(b) < 0$ ، فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a, b[$.

أمثلة

- (1) - لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5$.
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]2, 4[$.
- (2) - بين أن المعادلة $\cos x + \frac{1}{2} = x$ تقبل حلا في المجال $]0, \frac{\pi}{3}[$.

(3) - حالة دالة متصلة و رتيبة قطعاً

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I فإن $f(I)$ يحدد كما في الجدول التالي:

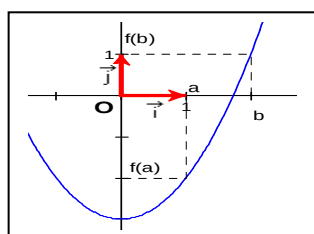
(أ) - f متصلة و تزايدية قطعاً على I (ب) - f متصلة و تناقصية قطعاً على I

المجال I	المجال $f(I)$
$[a, b]$	$[f(b), f(a)]$
$[a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) [$
$] -\infty, a]$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$
$] -\infty, a[$	$] \lim_{x \rightarrow a^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) [$

المجال I	المجال $f(I)$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$
$[a; b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$
$]a, b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) [$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$
$]a, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) [$
$] -\infty, a]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a)]$
$] -\infty, a[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) [$

نتيجة

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على المجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a, b]$ بحيث $f(c) = \lambda$



تمرين

- لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $f(x) = x^5 - x^3 + x - 2$.
- (1) - بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1 < \alpha < 2$.
 - (2) - حدد إشارة $f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$.

تمرين

بين أن المعادلة $x^3 + x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ و أن $0 < \alpha < 1$.

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

(IV) اتصال مركب دالتين **خاصية**

لتكن f و g دالتين عدديتين.
إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على المجال $f(I)$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على I .

أمثلة

أدرس اتصال الدالة f على مجموعة تعريفها في الحالات التالية:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x}{2x-1}} * f(x) = \sqrt{x^2 - x} * f(x) = |x^2 - 1|^3 * f(x) = \cos(x^2 - x + 2) *$$

نتيجة

❖ إذا كانت f دالة متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة على المجال I .
❖ إذا كانت f دالة متصلة وعلى مجال I فإن f^n و $|f|$ متصلتان على المجال I .

خاصية

$$\text{❖ إذا كانت } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \text{ و } g \text{ دالة متصلة في } l \text{ فإن: } \lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$$

مثال

$$\text{أحسب النهاية: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ (ضع } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \text{ و } g(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \text{)}$$

(V) الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال **نشاط 03**

Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [1, 3]$ بما يلي: $f(x) = x^2 - 2x$

(1) - بين أن الدالة f متصلة و تزايدية قطعاً على المجال I ، ثم حدد المجال $J = f(I)$.

(2) - بين أن $\forall x \in J, \forall y \in I : f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1+x}$

الدالة $x \mapsto 1 + \sqrt{1+x}$ المعرفة على المجال $J = f(I)$ تسمى الدالة العكسية لـ f و يرمز لها بالرمز f^{-1} .

خاصية

إذا كانت f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I فإن لكل y من المجال $f(I)$ ، المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I .

تعريف

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I ، و ليكن $J = f(I)$.
الدالة التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I بحيث $f(x) = y$ ،
تسمى الدالة العكسية للدالة f و نرمز لها بالرمز f^{-1} .

نتائج

لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I ، و f^{-1} دالتها العكسية.

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases} \quad \text{❖}$$

$$\forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x \quad \text{❖}$$

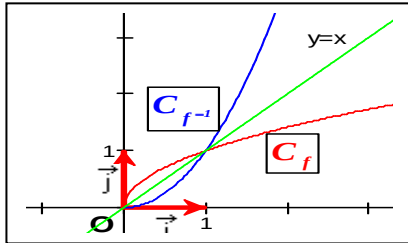
$$\forall x \in f(I), f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{❖}$$

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

(2)- خاصيات الدالة العكسية

خاصية

- إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعا على مجال I ، و f^{-1} دالتها العكسية فإن:
- ❖ f^{-1} متصلة على المجال $f(I)$.
 - ❖ f^{-1} رتبية قطعا على المجال $f(I)$ و لها نفس رتبة f على المجال I .
 - ❖ منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى f بالنسبة للمنصف الأول للمعلم في معلم متعامد ممنظم.



- ❖ مثال لمنحنى f و منحنى f^{-1} في معلم متعامد ممنظم
- ❖ المستقيم ذو المعادلة $(y = x)$ هو المنصف الأول للمعلم.

تمرين

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{2x-1}$.
- (1) - أ- تحقق من الدالة f متصلة على المجال I .
 - ب- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يتم تحديده.
 - (2) - أ- حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من المجال J .
 - ب- أرسم C_f و $C_{f^{-1}}$ في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

(3)- دالة الجذر من الرتبة n . Fonction racine nième.

نشاط 04

- لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [0, +\infty[$ بما يلي: $f(x) = x^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.
- بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يتم تحديده.

تعريف

- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.
- ❖ الدالة العكسية للدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي: $x \mapsto x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ويرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{x}$.
 - ❖ يرمز لصورة العدد x بهذه الدالة بالرمز $\sqrt[n]{x}$.
 - ❖ العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي x .

ملاحظة

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt{x} \text{ و } \sqrt[n]{x} = x \quad \cdot \quad \begin{cases} y = x^n \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

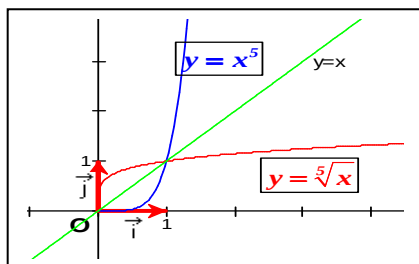
أمثلة

$$\sqrt[5]{32} = 2 \quad 2^4 = 16 \text{ لأن } \sqrt[4]{16} = 2 \quad 2^3 = 8 \text{ لأن } \sqrt[3]{8} = 2$$

خاصية

- ❖ الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$ ، و لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- ❖ منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ هو مماثل منحنى قصور الدالة $x \mapsto x^n$ على المجال $[0, +\infty[$ بالنسبة للمنصف الأول للمعلم، في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو



❖ منحنى دالة الجذر من الرتبة n : (حالة $n=5$) ←

خاصية

لتكن f دالة معرفة و موجبة على مجال I .
❖ إذا كانت f دالة متصلة على المجال I فإن الدالة $\sqrt[n]{f}$ متصلة على المجال I .
❖ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
❖ إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$

ملاحظة

تبقى هذه الخصائص صحيحة أيضا إذا كان x يؤول إلى x_0 على اليمين أو على اليسار أو إلى $\pm\infty$.

نتائج

❖ $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall a \in \mathbb{R}^+), (\forall b \in \mathbb{R}^+), (\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b)$
❖ $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall a \in \mathbb{R}^+), (\forall b \in \mathbb{R}^+), (\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a > b)$
❖ $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall a \in \mathbb{R}^+), (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$

(4) - العمليات على الجذور من الرتبة n .

خاصية

ليكن n و m عنصرين من $\mathbb{N}^*$ ، و a و b عنصرين من $\mathbb{R}^+$.
(1) $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
(2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ و $\sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$ إذا كان $b \neq 0$.
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$
(4) $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

البرهان

1. لدينا: $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ و منه $(\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n (\sqrt[n]{b})^n = ab$

2. لدينا: $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ و منه: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \frac{a}{b}$

3. لدينا: $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ و منه: $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = ((\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$

4. لدينا: $\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

تمرين

بين أن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*), (\forall m \in \mathbb{N}^*), (\forall a \in \mathbb{R}^+), (\sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m+n}})$

المستوى: 2Bac PC+SVT	اتصال دالة عددية	الثانوية التأهيلية مولاي رشيد- أجلموس
عدد الساعات :	Continuité d'une fonction numérique	الأستاذ : محمد إعلو

تمارين

$$(1) - \text{بسّط ما يلي: } A = \frac{\sqrt[4]{9} \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{9}}{\sqrt[5]{81} \sqrt{\sqrt{3}}} \text{ و } B = \frac{\sqrt[3]{4} \sqrt{8} \left(\sqrt[5]{\sqrt{2}} \right)^2}{\sqrt{\sqrt[3]{4}}}$$

$$(2) - \text{حل في } \mathbb{R} \text{ المعادلة: } \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

$$(3) - \text{حل في } \mathbb{R} \text{ المتراجحة: } \sqrt[6]{2x-3} < 2$$

(5)-القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

تعريف

ليكن x عدد حقيقياً موجباً قطعاً و r عدداً جذرياً غير منعدم.

نسمي القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r العدد x^r المعروف بما يلي: $x^r = \sqrt[n]{x^m}$

حيث: $m \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{N}^*, r = \frac{m}{n}$

ملاحظات

❖ إذا كان $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ فإن: $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n']{x^{m'}}$

❖ لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$ ، ولكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، فإن: $(x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r')$

❖ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، ولكل n من $\mathbb{N}^*$ ، لدينا: $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ و $x^0 = 1$

أمثلة

$$16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 8 \quad \sqrt[6]{2^3} = 2^{\frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \quad 32^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{32^2} = 2^2 = 4$$

ملاحظة

❖ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي: $x \mapsto x^{\frac{m}{n}}$ هي مركب الدالتين المعرفتتين على $\mathbb{R}_+^*$ بما يلي:

$$x \mapsto x^m \text{ و } x \mapsto \sqrt[n]{x}$$

نمدد خاصيات القوى الصحيحة النسبية إلى القوى الجذرية

خاصيات

لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$ لدينا:

$$x^r x^{r'} = (xy)^r \quad x^r x^{r'} = x^{r+r'} \quad \diamond$$

$$\left(\frac{x}{y} \right)^r = \frac{x^r}{y^r} \quad (x^r)^{r'} = x^{rr'} \quad \diamond$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad \diamond$$