

اتصال الدوال العددية

I - اتصال دالة في نقطة - الاتصال على مجال :

(1) اتصال دالة في نقطة :

نشاط تمهيدى :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = 4 \end{cases}$$

1 - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

2 - احسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

3 - أنشئ التمثيل المبياني للدالة f .

نلاحظ أن : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$. نقول إن الدالة f متصلة في 2 .

تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I .

نقول إن f دالة متصلة في a إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

ملاحظة :

إذا كانت f غير متصلة في a فإننا نقول إن f منقطعة في a .

تمرين تطبيقي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & ; \quad x \neq 2 \\ f(2) = a & ; \quad a \in \mathbb{R} \end{cases}$$

حدد قيمة العدد الحقيقي a لكي تكون f دالة متصلة في 2 .

(2) الاتصال على اليمين - الاتصال على اليسار :

نشاط تمهيدى :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} & ; \quad x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x} & ; \quad x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1 - تحقق أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ ، نقول إن f دالة متصلة على اليمين في 0 .

2 - تحقق أن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ ، نقول إن f دالة متصلة على اليسار في 0 .

3 - هل الدالة f دالة متصلة في 0 ؟

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a; a+r[$ حيث : r عدد حقيقي موجب قطعاً .

نقول إن f دالة متصلة على اليمين في a إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

تعريف 1 :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-r; a]$ حيث : r عدد حقيقي موجب قطعاً .

نقول إن f دالة متصلة على اليمين في a إذا كان : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و a عنصرا من I .

تكون f دالة متصلة في a إذا وفقط إذا كانت f متصلة على اليمين و متصلة على اليسار في a .

تطبيق :

$$\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x & ; \quad (x < -1) \\ f(x) = x^2 + 4 & ; \quad (-1 \leq x \leq 0) \\ f(x) = \frac{2x^2 + 4x}{x} & ; \quad (x > 0) \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f في كل من النقط : -1 و 1 و 0 .

(3) الاتصال على مجال :

تعريف :

- نقول إن f دالة متصلة على مجال مفتوح I إذا كانت متصلة في كل عدد من I .
- نقول إن f دالة متصلة على مجال مغلق $[a; b]$ إذا كانت متصلة في كل عدد من المجال المفتوح $]a; b[$ ومتصلة على اليمين في a وعلى اليسار في b .

ملاحظات :

- نعرف بالمثل الاتصال على المجال $]a; b[$ وعلى المجال $[a; b]$.
- التمثيل المباني لدالة متصلة على مجال $[a; b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتان اللتان إحداثيتهما $(a; f(a))$ و $(b; f(b))$.

خاصيات :

- (1) كل دالة حدودية متصلة على IR .
- (2) كل دالة جذرية متصلة على كل مجال من مجموعة تعريفها .
- (3) الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على IR^+ .

تمرين تطبيقي :

نعتبر الدالة f المعرفة في التمرين التطبيقي السابق .

ادرس اتصال الدالة f على IR .

(4) العمليات على الدوال المتصلة :

خاصية :

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I فإن الدوال $f + g$ و fg و λf ؛ $(\lambda \in IR)$ متصلة على I .

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على مجال I و $g(x) \neq 0$ لكل x من I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين على المجال I .

أمثلة :

- (1) الدالة $x \mapsto x^2 + \sqrt{x}$ متصلة على IR^+ لأنها مجموع الدالتين $x \mapsto x^2$ و $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلتين على IR^+ .
- (2) الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ متصلة على $]0; +\infty[$ لأنها مقلوب الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0; +\infty[$ ولا تنعدم على $]0; +\infty[$.
- (3) الدالة $x \mapsto \frac{x+2}{x^2 + \sqrt{x}}$ متصلة على $]0; +\infty[$ لأنها خارج الدالة $x \mapsto x+2$ المتصلة على $]0; +\infty[$ ؛ على الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ المتصلة على $]0; +\infty[$ ولا تنعدم على $]0; +\infty[$.

تمرين 1 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x + a & ; & x < 1 \\ f(x) = 2x - 3 & ; & 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = bx + 1 & ; & x > 3 \end{cases}$$

حدد العددين الحقيقيين a و b لكي تكون f دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

تمرين 2 :

بين أن الدالة f متصلة على المجال I في كل حالة من الحالات التالية :

$$(1) \quad I = [0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = 2x + \sqrt{x}$$

$$(2) \quad I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$$

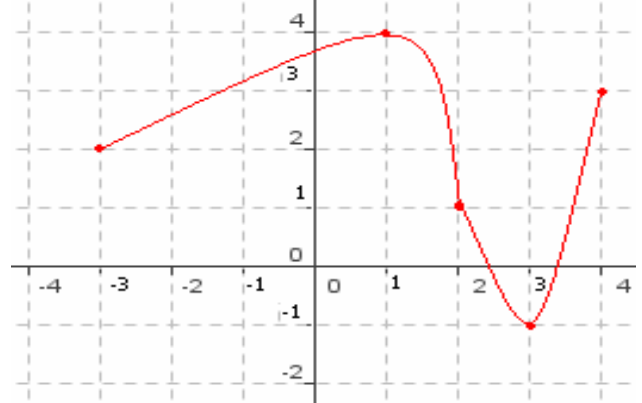
$$(3) \quad I =]0; +\infty[\quad ; \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x}}$$

II - صورة مجال بدالة متصلة :

1 (صورة قطعة - صورة مجال :

نشاط تمهيدي :

نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[-3; 4]$ بتمثيلها المبياني التالي :



حدد صورة كل مجال من المجالات التالية : $[-3; 1]$ و $[2; 4]$ و $[1; 3]$ و $[-3; 4]$.

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة .

صورة مجال بدالة متصلة هي مجال .

ملاحظات :

1. اتصال دالة هو شرط كاف لكي تكون صورة مجال هي مجال ، لكن هذا الشرط غير لازم بحيث يمكن أن تكون صورة مجال بدالة غير متصلة هي مجال .

مثال : نعتبر الدالة المعرفة على المجال $[-1; 2]$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = 2x & ; & x \in [-1; 1] \\ f(x) = x - 1 & ; & x \in]1; 2] \end{cases}$$

أنشئ التمثيل المبياني لدالة f ولاحظ أن صورة المجال $[-1; 2]$ بالدالة f هي المجال $[-2; 2]$ رغم أن الدالة f غير متصلة على المجال $[-1; 2]$.

2. المجالان I و $f(I)$ ليسا دائما من نفس النوع ، فصورة المجال نصف المفتوح $[-1; 2]$ بالدالة $x \mapsto x^2$ هي المجال المغلق $[0; 4]$.

3. $f([a; b]) = [m; M]$ حيث m هي القيمة الدنيا و M هي القيمة القصوى للدالة f على $[a; b]$.

2 (صورة مجال بدالة متصلة ورتيبة قطعا :

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I لدينا النتائج التالية :

الصورة $f(I)$

المجال I	f متصلة وتزايدية قطعاً على I	f متصلة وتناقصية قطعاً على I
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a; b[$	$[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)]$
$[a; +\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$] -\infty; a]$	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a)]$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$
IR	$[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)]$	$[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)]$

3) مبرهنة القيم الوسيطة :

بما أن $f([a; b]) = [m; M]$ فإن $f(a)$ و $f(b)$ ينتميان على القطعة $[m; M]$ نستنتج أنه مهما يكن العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ فإن $k \in [m; M]$. إذن : يوجد على الأقل عنصر c من $[a; b]$ بحيث : $f(c) = k$

مبرهنة :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و a و b عنصرين من المجال I .
لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a; b]$ بحيث : $f(c) = k$.

ملاحظة :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ بحيث $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$ فإن 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$.
حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإنه يوجد على الأقل عنصر c من $[a; b]$ بحيث : $f(c) = 0$.
العدد c هو حل للمعادلة $f(x) = 0$.

نستنتج النتيجة التالية :

نتيجة 1 :

إذا كانت f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ بحيث : $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[a; b]$.

تمرين تطبيقي :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = x^4 + x^2 + 4x - 1$:
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-1; 1]$.

نتيجة 2 :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a; b]$ بحيث : $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[a; b]$.

تمرين :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3 + 4x - 1$:
بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $[-1; \frac{1}{2}]$.

III - اتصال مركب دالتين :**نشاط تمهيدي :**

نعتبر f و g الدالتين المعرفتين بما يلي : $f(x) = x^2 + x + 1$ و $g(x) = \sqrt{x}$.

(1) حدد الدالة $g \circ f$

(2) ادرس اتصال f في 0 واتصال g في $f(0)$

(3) ادرس اتصال الدالة $g \circ f$ في 0 .

نقبل الخاصية التالية :

خاصية :

- لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث : $f(I) \subset J$ وليكن a عنصرا من I . إذا كانت f دالة متصلة في a و g دالة متصلة في $f(a)$ فإن $g \circ f$ دالة متصلة في a .
- إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J بحيث : $f(I) \subset J$ فإن $g \circ f$ دالة متصلة على المجال I .

تمرين :

- (1) باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sin(x^2 - 3x + 2)$ على IR .
- (2) باستعمال مركب دالتين ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ على $[-1;1]$.

نتائج :

- (1) إذا كانت f دالة متصلة وموجبة على مجال I (أي : $(\forall x \in I; f(x) \geq 0)$) فإن الدالة : $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ متصلة على المجال I .
- (2) إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto \sin(f(x))$ متصلة على المجال I .
- (3) إذا كانت f دالة متصلة على مجال I فإن الدالة : $x \mapsto \cos(f(x))$ متصلة على المجال I .

تمرين :

- (1) ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x-1}}$ على المجال $]1;+\infty[$.
- (2) ادرس اتصال الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = \cos\left(\frac{x-1}{x^2+1}\right)$ على IR .

IV - الدالة العكسية لدالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال :**(1) تعريف الدالة العكسية وخصائصاتها :**

نشاط تمهيدي : نشاط 9 ص 18 من الكتاب المدرسي في رحاب الرياضيات .
نقبل الخاصيتين التاليتين :

خاصية 1 :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I فإن لكل عدد حقيقي y من المجال $f(I)$ المعادلة $f(x) = y$ تقبل حلاً وحيداً في المجال I .

ملاحظة :

من هذه الخاصية نستنتج أنه توجد دالة وحيدة معرفة من المجال $f(I)$ نحو المجال I تربط كل عدد حقيقي y من $f(I)$ بعدد حقيقي وحيد x من I هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = y$.

تعريف :

الدالة التي تربط كل عنصر y من $f(I)$ بالعنصر الوحيد x من I بحيث : $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية للدالة f ويرمز لها بالرمز f^{-1} .

ولدينا : $\forall y \in f(I) ; \forall x \in I : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

خاصية 2 :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} :

- الدالة f^{-1} معرفة ومتصلة على المجال $f(I)$
- الدالة f^{-1} رتيبة قطعاً على المجال $f(I)$ ولها نفس منحنى تغير الدالة f .
- في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ ، منحنى الدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

مثال :

- نعتبر الدالة f المعرفة على IR^+ بما يلي : $f(x) = x^2$.
- الدالة f متصلة وتزايدية قطعاً على IR^+ ولدينا : $f(IR^+) = IR^+$
- إذن : الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من IR^+ نحو IR^+ .
- f^{-1} متصلة وتزايدية قطعاً على IR^+ .

لدينا : $\forall y \in \mathbb{R}^+ ; \forall x \in \mathbb{R}^+ : f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$

إذن : $\forall y \in \mathbb{R}^+ : f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

التمثيل المبياني للدالة f^{-1} هو مماثل منحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة $y = x$.

تطبيقات :

نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \sqrt{x-1}$

(1) بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J المطلوب تحديده

(2) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J

(3) مثل في المستوى المنسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ متعامد ممنظم (C_f) و $(C_{f^{-1}})$ منحنى f و f^{-1} على التوالي .

2 (دالة الجذر من الرتبة n) :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ ب : $f(x) = x^n$ متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[0; +\infty[$.

إذن : الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على المجال : $f([0; +\infty[) = [0; +\infty[$

تعريف :

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$ ؛ الدالة العكسية للدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ ب : $x \mapsto x^n$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n ؛

ونرمز لها بالرمز $\sqrt[n]{}$.

نرمز لصورة x بهذه الدالة بالرمز $\sqrt[n]{x}$ ؛ العدد $\sqrt[n]{x}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد x .

$$\text{لدينا : } \begin{cases} y = x^n \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \geq 0 \end{cases}$$

خاصية :

الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $[0; +\infty[$ ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

في معلم متعامد ممنظم ؛ منحنى الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ هو مماثل منحنى الدالة $x \mapsto x^n$ بالنسبة للمستقيم ذو المعادلة

$y = x$

نتائج :

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+); (\forall b \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+); (\forall b \in \mathbb{R}^+) : \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$$

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+) : (\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n} = a$$

حالة خاصة :

إذا كان $n = 2$ فإن دالة الجذر من الرتبة 2 هي دالة الجذر المربع ونكتب صور كل عدد حقيقي x موجب : $\sqrt{x}$

بدل $\sqrt[3]{x}$.

3 (العمليات على الجذور من الرتبة n) :

ليكن m و n عنصرين من $\mathbb{N}^*$ ؛ و a و b عنصرين من $\mathbb{R}^+$ يمكن أن نبين العلاقات التالية :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$$

$$(\text{إذا كان } b \neq 0) \quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

تطبيقات :

$$A = \frac{\sqrt[5]{128} \times \left(\sqrt[3]{\sqrt[5]{4}} \right)^2 \times \sqrt{32}}{\sqrt[3]{\sqrt{50}}} \quad (1) \text{ بسط العدد :}$$

$$(2) \text{ اجعل مقام العدد } B = \frac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}} \text{ جذريا .}$$

- (3) رتب تزايديا الأعداد التالية : $\sqrt[3]{8}$ و $\sqrt[5]{3}$ و $\sqrt{5}$ و $\sqrt[12]{4}$.
 (4) حل في IR المعادلات التالية : $x^7 = 128$ و $x^5 = -32$ و $x^4 = 3$ و $x^{10} = -5$.

(4) القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً : تعريف :

ليكن x عدد حقيقي موجب قطعاً و r عدد جذري غير منعدم حيث : $r = \frac{m}{n}$ ($n \in IN^*$ و $m \in Z^*$)

القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r هو العدد الذي نرمز له بالرمز x^r والمعرف ب : $x^r = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$.
أمثلة :

$$5^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{5^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{5^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{5^2}} \quad ; \quad 2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4}$$

ملاحظات :

• إذا كان : $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ حيث ($n \in IN^*$ و $m \in Z^*$) و ($q \in IN^*$ و $p \in Z^*$) فإن : $x^r = \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[q]{x^p}$

مثال : $r = \frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ ؛ $x^r = \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[9]{x^6}$.

• لكل r و r' من Q^* ولكل x من IR^{+*} لدينا : $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$.

• إذا كان $m = 1$ فإن : $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$ لكل x من IR^{+*} .

نتائج :

• $(\forall r \in Q^*) ; (\forall x \in]0; +\infty[) ; x^r > 0$

• $(\forall n \in IN^*) ; (\forall m \in Z^*) ; (\forall x \in]0; +\infty[) \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^m$

نمدد الخاصيات المتعلقة بالقوى الصحيحة النسبية إلى القوى الجذرية .
خاصية :

لكل x و y من $]0; +\infty[$ ولكل r و r' من Q^* لدينا :

$x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ •	$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$ •
$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$ •	$(x^r)^{r'} = x^{rr'}$ •
$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ •	$x^r \times y^r = (xy)^r$ •

تطبيقات :

(1) اكتب على شكل قوة أساسها 2 العدد : $A = \sqrt[3]{2^5} \times \sqrt[5]{8} \times \sqrt{2}$

(2) بسط العددين : $B = \frac{3^{\frac{1}{3}} \times 9^{\frac{2}{3}}}{81^{\frac{1}{4}}}$ و $C = \frac{4^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{6}{5}} \times 2^{\frac{1}{15}}}{16^{\frac{1}{4}} \times 8^{\frac{1}{5}} \times 2^{\frac{1}{3}}}$

(3) حدد العدد x بحيث : $(3x+1)^{\frac{2}{5}} = 32$