

الدوال الأصلية و حساب التكامل

1- الدوال الأصلية

تعريف وخصائص

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول إن دالة F هي **دالة أصلية** للدالة f على I إذا كانت F **قابلة للاشتقاق** على I وكان $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

خاصية 1 لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على I **مجموعة الدوال الأصلية** للدالة f على المجال I هي المجموعة المكونة من الدوال $F + \lambda$ مع $\lambda \in \mathbb{R}$

خاصية 2 لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية F على I ليكن x_0 من I و y_0 من $\mathbb{R}$ توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على مجال I بحيث $F(x_0) = y_0$

خاصية 3 إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالتين f و g على التوالي في مجال I فان

$F + G$ هي دالة أصلية $f + g$ و αF دالة أصلية لـ αf (حيث $\alpha \in \mathbb{R}$)

خاصية 4 كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية على I



الدالة f	الدوال الأصلية F	مجموعة التعريف I للدالة f و الدوال F
0	λ	$I = \mathbb{R}$
a	$ax + \lambda$	$I = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{N}^* \quad x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + \lambda$	$I = \mathbb{R}$
$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} \quad x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + \lambda$	$I = \mathbb{R}_-^* \quad \text{ou} \quad I = \mathbb{R}_+^*$

$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\} \quad f^r \cdot f'$	$\frac{1}{r+1} f^{r+1} + \lambda$	I هو المجال التي تكون فيه f^r معرفة و f قابلة للاشتقاق
$f + g$	$f + g + \lambda$	I هو المجال التي تكون فيه f و g قابلتان للاشتقاق
$f'g + fg'$	$fg + \lambda$	I هو المجال التي تكون فيه f و g قابلتان للاشتقاق
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g} + \lambda$	I هو المجال التي تكون فيه f و g قابلتان للاشتقاق و لا تنعدم فيه g

$n \in \mathbb{Z}^* - \{-1\} \quad x^n$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + \lambda$	$I = \mathbb{R}_-^* \quad \text{ou} \quad I = \mathbb{R}_+^*$
$r \in \mathbb{Q}^* - \{-1\} \quad x^r$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1} + \lambda$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos(ax + b) \quad a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax + b) + \lambda$	$I = \mathbb{R}$
$\sin(ax + b) \quad a \neq 0$	$-\frac{1}{a} \cos(ax + b) + \lambda$	$I = \mathbb{R}$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + \lambda$	$I = \left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[; k \in \mathbb{Z}$

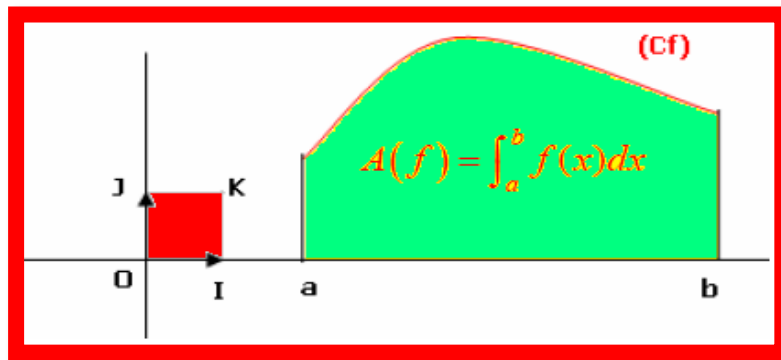


1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ لدينا : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ حيث

F دالة أصلية للدالة f على $[a; b]$.

التأويل الهندسي للعدد $\int_a^b f(x) dx$



2. خصائص :

$$\int_b^a k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad ; \quad \int_a^a f(x) dx = 0$$

هذه الخاصية تسمى الخطائية

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

علاقة شال تسمى

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$$



3. التكامل والترتيب:

لتكن f دالة متصلة على المجال $[a; b]$ حيث $a < b$. $f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$.

4. القيمة المتوسطة لدالة متصلة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a; b]$ ($a \neq b$). العدد الحقيقي $A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a; b]$. يوجد على الأقل $c \in [a; b]$ بحيث

5. تقنيات حساب التكامل:

- استعمال الدوال الأصلية مباشرة
- كتابة دالة جذرية كمجموع دوال جذرية
- اخطاط دوال مثلثية (صيغة أولير ومثلث باسكال)
- المكاملة بالأجزاء
- f و g قابلتين للاشتقاق على $[a; b]$ و f' و g' متصلتان على $[a; b]$.

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

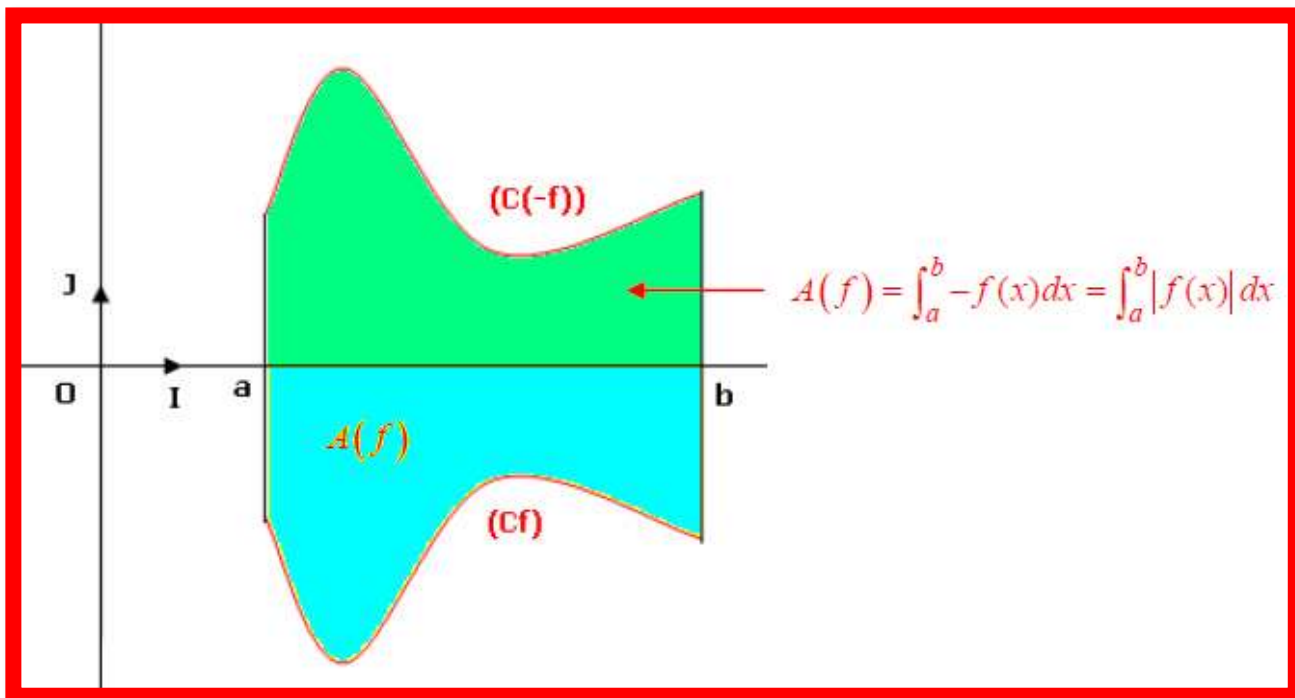
6. حساب المساحة والحجم:

أ - المساحات:

- إذا كانت f متصلة وموجبة على $[a; b]$ فإن مساحة الحيز المحصور بين

$$(C_f) \text{ و } (Ox) \text{ و } x=a \text{ و } x=b \text{ هي } \int_a^b f(x)dx$$



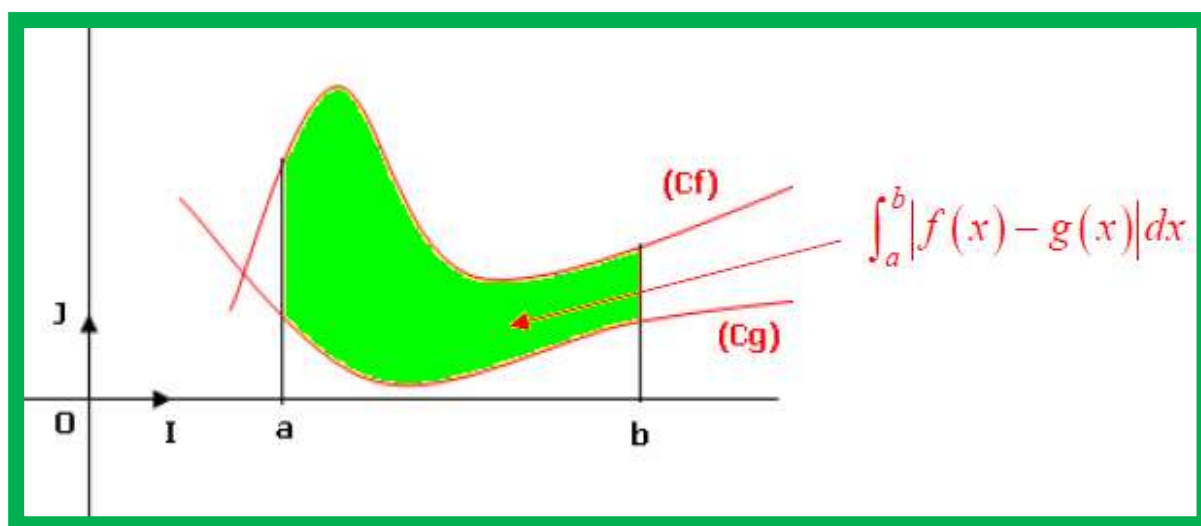


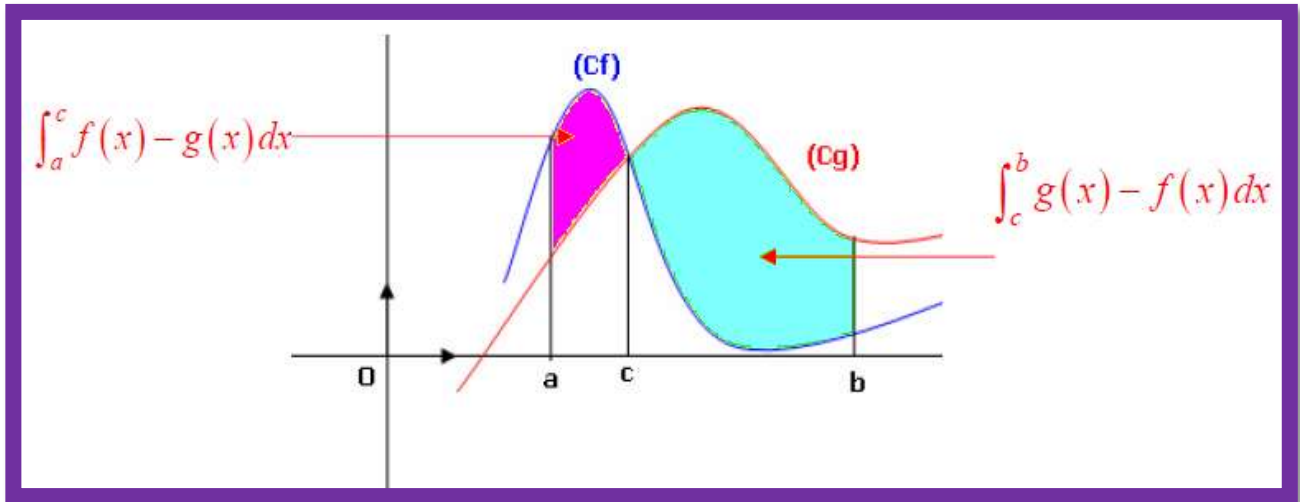
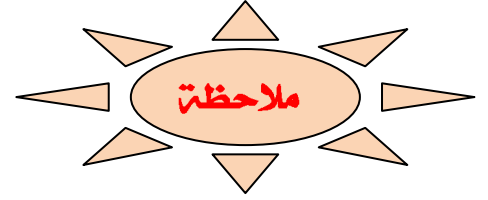
* إذا غيرت إشارتها f على المجال $[a;b]$ فإن مساحة الحيز هي:

$$A(\Delta) = \left| \int_c^a f(x)dx \right| + \left| \int_a^c f(x)dx \right| + \left| \int_c^d f(x)dx \right|$$

* مساحة الحيز بين (C_f) و (C_g) و $x=a$ و $x=b$ هي $\left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$ نتكلم عن

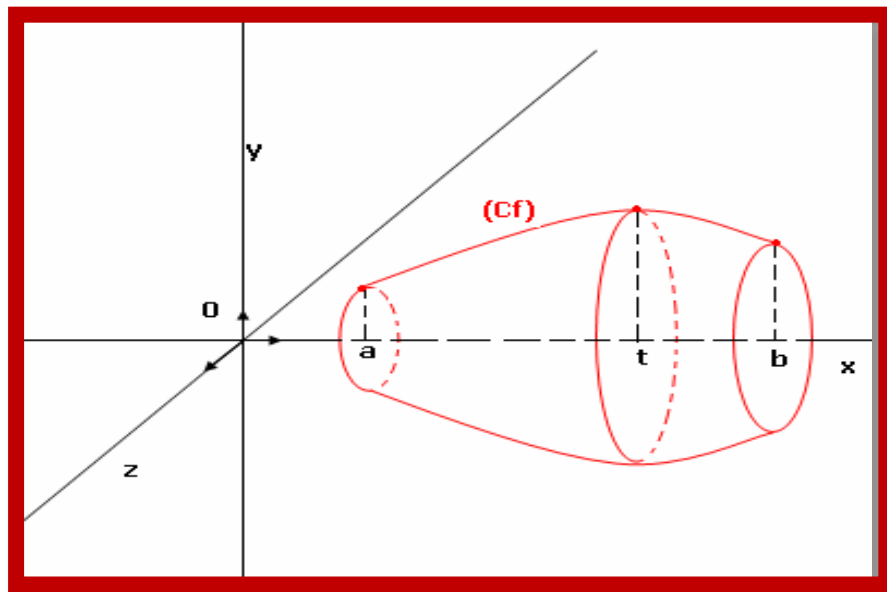
المساحة الجبرية والهندسية





أ - الحجم

في معلم $(\vec{i}; \vec{j})$ و f متصلة على $[a; b]$. إذا دار المنحنى على محور الافاصيل دورة كاملة فانه يولد مجسم الدوران



حجمه هو $V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$ بوحدة قياس الحجم

