

الدالة الأسية

1-تعريف

• الدالة العكسية لدالة اللوغاريتم النبيري تسمى الدالة الأسية النبيرية

أو الدالة الأسية ونرمز لها بالرمز $\exp$ أو e .

$$\forall x \in \mathbb{R}; \forall y \in]0; +\infty[$$

$$e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

2-خصائص

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2; e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$$

$$e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^x - e^y$$

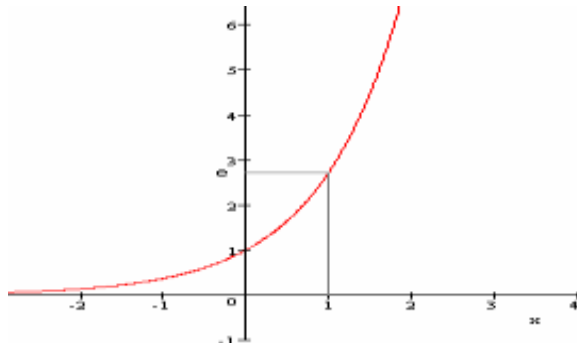
$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$(e^x)^r = e^{xr}$$

$$\ln e^f = f; e^0 = 1; e^1 = e; e^{\ln f} = f$$

3- التمثيل المباني للدالة الاسية

في معلم متعامد ممنظم منحني الدالة $\ln$ و منحني الدالة e متماثلان بالنسبة للمنتصف الأول



4. المشتقة

بما أن دالة $\ln$ قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ومشتقتها لا تنعدم على $]0; +\infty[$ فإن الدالة الأسية قابلة

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x \quad \text{و} \quad \mathbb{R} \text{ للاشتقاق على}$$

الدالة $x \rightarrow e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R} \quad (e^x)' = e^x$

إذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $x \rightarrow e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I

$$\forall x \in I \quad [e^{u(x)}]' = u'(x) e^{u(x)}$$

5. النهايات

دالة e^x : دالة متصلة وتزايدية على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

5. الدالة الأسية للأساس a

• لكل $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ الدالة $e^{x \ln a}$ المعرفة على $\mathbb{R}$ تسمى الدالة الأسية للأساس a

ونرمز لها بـ: $\exp_a$

• ولكل x من $\mathbb{R} \leftarrow a^x = e^{x \ln a}$ و $a^0 = 1$ و $a^1 = a$

• جميع خصائص الدالة الأسية النبيرية تبقى صالحة للدالة الأسية ذات الأساس

6. دراسة الدالة $x \rightarrow a^x$

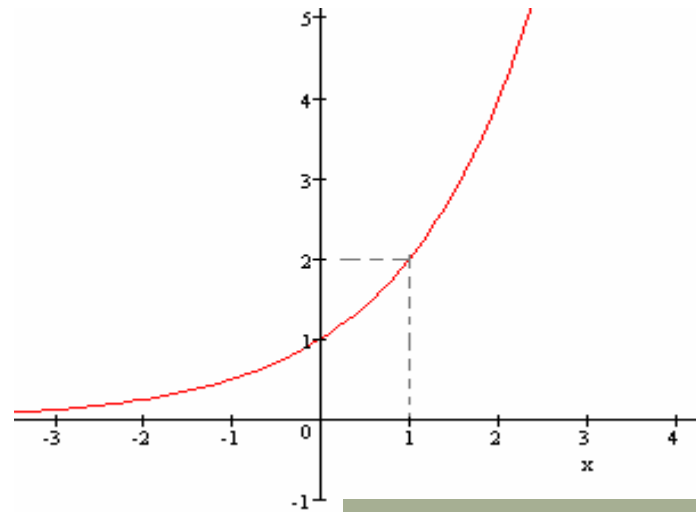
ليكن $a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$

الدالة $x \rightarrow a^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $\forall x \in \mathbb{R} \quad (a^x)' = a^x \ln a$



الحالة الأولى

إذا كان $a > 1$ فإن $\ln a > 0$ ومنه الدالة $x \rightarrow a^x$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$



الحالة الثانية

إذا كان $0 < a < 1$ فإن $\ln a < 0$ ومنه الدالة $x \rightarrow a^x$ تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$

