

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2011

التمرين رقم 1 :

أ- لنبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 :لدينا لكل n من IN

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} + 2 = \frac{5 + 8u_n + 2u_n}{u_n}$$

$$= \frac{5(1 + 2u_n)}{u_n} = 5\left(\frac{1}{u_n} + 2\right) = 5v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها 5 وحدها الأول

$$v_0 = \frac{1}{u_0} + 2 = 3$$

* v_n بدلالة n :بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن :

$$(\forall n \in IN); v_n = v_0 \cdot q^n$$

$$(\forall n \in IN); v_n = 3 \times 5^n \quad \text{إذن}$$

ب- * لنبين أن $u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$ لكل n من IN :

$$\text{لدينا } v_n = \frac{1}{u_n} + 2 \text{ لكل } n \text{ من } IN$$

$$(\forall n \in IN); v_n - 2 = \frac{1}{u_n} \quad \text{ومنه}$$

$$(\forall n \in IN); u_n = \frac{1}{v_n - 2} \quad \text{إذن}$$

$$(\forall n \in IN); u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \text{ومنه}$$

* نهاية المتتالية (u_n) :

$$(\forall n \in IN); u_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \text{بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty \text{ أي } 5 > 1 \text{ ولدينا}$$

التمرين رقم 3 :

$$1- \text{ لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } z^2 - 18z + 82 = 0$$

$$\text{لدينا } \Delta = -4 \text{ ومنه } Z_1 = \frac{18 + 2i}{2} = 9 + i$$

$$\text{و } Z_2 = \overline{Z_1} = 9 - i \quad \text{إذن } S = \{9 - i, 9 + i\}$$

$$2- \text{ أ- لدينا } \frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2}{2i} = -i$$

* استنتاج :

$$\text{بما أن } \frac{c-b}{a-b} = -i$$

التمرين رقم 2 :

1- لنبين بالترجع أن $u_n > 0$ لكل n من IN :من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ ومنه $u_0 > 0$ نفترض أن $u_n > 0$ ولنبين أن $u_{n+1} > 0$ (n طبيعي معلوم)بما أن $u_n > 0$ فإن $5 + 8u_n > 0$ ومنه $u_{n+1} > 0$ وبالتالي حسب مبدأ التراجع $u_n > 0$ لكل n من IN 2- نضع $v_n = \frac{1}{u_n} + 2$ لكل n من IN .

التمرين رقم 4 :

I- لدينا $g(x) = (1-x)e^x - 1$ 1- أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع و جداء دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)' \\ = -e^x + (1-x)e^x = e^x(-1+1-x) \\ = -xe^x$$

ب- بما أن $(\forall x \in \mathbb{R}); g'(x) = -xe^x$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x > 0$$

فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $-x$ بما أن $-x \geq 0$ على $]-\infty, 0]$ فإن $\forall x \in]-\infty, 0]; g'(x) \geq 0$ ومنه g تزايدية على المجال $]-\infty, 0]$ وبما أن $-x \leq 0$ على $[0, +\infty[$ فإن $\forall x \in [0, +\infty[; g'(x) \leq 0$ ومنه g تناقصية على المجال $[0, +\infty[$ * لدينا $g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ 2- لدينا جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\nearrow 0 \searrow$		

ومنه 0 قيمة قصوى مطلقة لـ g على $\mathbb{R}$ ،إذن $(\forall x \in \mathbb{R}); g(x) \leq 0$ II- لدينا $f(x) = (2-x)e^x - x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x - x = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x)e^x = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)e^x - x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2-x}{x} \right) e^x - \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) e^x - 1 \\ = -\infty$$

ومنه المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل فرعاً شلجيمياً بجوار $+\infty$ في اتجاه محور

الأرتاب .

$$-i = 1 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

$$\left| \frac{c-b}{a-b} \right| = 1 \text{ و } \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{إذن } |c-b| = |a-b| \text{ و } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

وبالتالي $BC = BA$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ وهذا يعني أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في B .ب- الشكل المثلثي للعدد العقدي $4(1-i)$:

$$\text{لدينا } |4(1-i)| = 4|1-i| = 4\sqrt{2}$$

$$4(1-i) = 4\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 4\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

ج- *

$$(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i)$$

$$= (2-2i) \cdot 2 = 2 \cdot 2(1-i) = 4(1-i)$$

* استنتاج :

$$(c-a)(c-b) = 4(1-i) \text{ لدينا}$$

$$\text{ومنه } |(c-a)(c-b)| = |4(1-i)|$$

$$\text{إذن } |c-a| |c-b| = 4\sqrt{2}$$

$$AC \times BC = 4\sqrt{2} \text{ وبالتالي}$$

$$\text{د- } R(M) = M' \Leftrightarrow Z' - b = e^{\frac{3\pi}{2}}(Z-b)$$

$$\Leftrightarrow Z' - b = -i(Z-b)$$

$$\Leftrightarrow Z' = -iZ + ib + b$$

$$\Leftrightarrow Z' = -iZ + (i+1)b$$

$$\Leftrightarrow Z' = -iZ + (i+1)(9-i)$$

$$\Leftrightarrow Z' = -iZ + 10 + 8i$$

* ليكن c' لحق النقطة C' :

$$\text{إذن } c' = -ic + 10 + 8i = -i(11-i) + 10 + 8i$$

$$= -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$$

تقبل حلا وحيدا α بحيث $\frac{3}{2} < \alpha < 2$

5- $f(x) + x = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^x = 0$

$\Leftrightarrow 2-x = 0 \quad (e^x \neq 0)$

$\Leftrightarrow x = 2$

إذن $S = \{2\}$

* المعادلة $(x \in \mathbb{R}) ; f(x) + x = 0$

تعني $(x \in \mathbb{R}) ; f(x) = -x$

تعني مبيانيا أن $(\mathbb{C})$ و (D) يتقاطعان في نقطة واحدة أفصولها 2

وبما أن $f(2) = -2$

فإن نقطة تقاطع $(\mathbb{C})$ و (D) هي $A(2, -2)$

ب- إشارة $f(x) + x$ هي إشارة $2-x$

لأن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

4- ومنه إشارة $f(x) + x$ تلخص في الجدول التالي:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) + x$	+	0	-

ج- لدينا $(\forall x \in]-\infty, 2]) ; f(x) + x \geq 0$

إذن $(\forall x \in]-\infty, 2]) ; f(x) \geq -x$

ومن مبيانيا يعني أن $(\mathbb{C})$ يوجد فوق (D) على المجال $] -\infty, 2]$

ولدينا $(\forall x \in [2, +\infty[) ; f(x) + x \leq 0$

إذن $(\forall x \in [2, +\infty[) ; f(x) \leq -x$

ومن مبيانيا يعني أن $(\mathbb{C})$ يوجد تحت (D) على المجال $[2, +\infty[$

6- أ- لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = g(x)$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = g'(x)$

إذن f''' تنعدم في 0 وتغير إشارتها على يمين وعلى يسار 0 (انظر إشارة $g'(x)$ في الجزء I)

ومن مبيانيا يعني أن $(\mathbb{C})$ يقبل نقطة انعطاف وحيدة زوج إحداثياتها هو $(0, 2)$.

ب- إنشاء (D) و $(\mathbb{C})$ في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لدينا:

x	0	1
y	0	-1

(D)

2- أ- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - x$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x = +\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x)e^x - x + x$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x = 0$

ب- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (-x)] = 0$

فإن $(\mathbb{C})$ يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = -x$ بجوار $-\infty$

3- أ- فالدالة قابلة للاشتقاق كجدا ومجموع دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، لدينا:

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = (2-x)e^x + (2-x)(e^x)' - 1$

$= -e^x + (2-x)e^x - 1$

$= (-1 + 2-x)e^x - 1 = (1-x)e^x - 1$

$= g(x)$

ب- لدينا $f'(0) = g(0) = 0$

ومن مبيانيا يقبل مماسا أفقيا في النقطة التي أفصولها 0.

ج- لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = g(x)$

وبما أن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \leq 0$

فإن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) \leq 0$

إذن f تناقصية قطعيا على $\mathbb{R}$.

3- * جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	-
$f(x)$	$+\infty$	2	$-\infty$

4- * لدينا f متصلة و تناقصية قطعيا على $\mathbb{R}$

و $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$

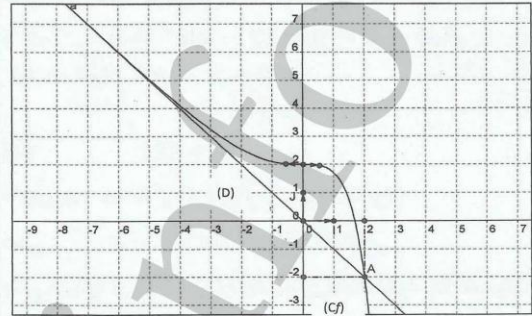
إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$

* بما أن $f(2) = (2-2)e^2 - 2 = -2 < 0$

$f(\frac{3}{2}) = (2 - \frac{3}{2})e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2} = \frac{e^{\frac{3}{2}} - 3}{2} > 0$

أي $f(\frac{3}{2}), f(2) < 0$

فإن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $f(x) = 0$



7- أ- نضع : $I = \int_{-1}^0 (2-x)e^x dx$

بوضع $\begin{cases} U = 2-x \\ V' = e^x \end{cases}$ نجد $\begin{cases} U' = -1 \\ V = e^x \end{cases}$

$$I = [(2-x)e^x]_{-1}^0 + \int_{-1}^0 e^x dx = [(2-x)e^x + e^x]_{-1}^0 = [(3-x)e^x]_{-1}^0 = 3 - 4e^{-1} = 3 - \frac{4}{e}$$

ب- مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) والمستقيم

(D) والمستقيمين اللذين معادلتهما $x=0$ و $x=-1$

هي : $A = \int_{-1}^0 |f(x) + x| dx$ (u.a)

بما أن $(\forall x \in [-1, 0]) ; f(x) + x \geq 0$

فإن $A = \int_{-1}^0 (f(x) + x) dx$ (u.a)

$$= \int_{-1}^0 (2-x)e^x dx \quad (u.a)$$

$$= \left(3 - \frac{4}{e}\right) cm^2.$$