

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2013

التمرين رقم 1 :

1-أ- لدينا $\vec{OA}(-1,1,0)$ و $\vec{OB}(1,0,1)$ إذن :

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

المتجهة $(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$ منظمية على المستوى (OAB) ومنه $d \in \mathbb{R}$ بحيث $x + y - z + d = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) ، وبما أن $O \in (OAB)$ فإن $d = 0$ ومنه $x + y - z = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (OAB) .

ب- لدينا

$$d(\Omega, (OAB)) = \frac{|1 + 1 - (-1)|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

وبما أن $\sqrt{3} < 3$ فإن (OAB) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) شعاعها $\sqrt{(3)^2 - (\sqrt{3})^2}$ أي : $\sqrt{6}$ 2-أ- المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (OAB) إذن فهو يقبلالمتجهة $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ كمتمجهة موجهة له وبما أنه يمر من

$$\Omega(1, 1, -1)$$

$$\text{فإن : } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- ليكن (a, b, c) ممثلو إحداثيات مركز الدائرة (Γ) فهويحقق التمثيل البارامتري للمستقيم (Δ) ويحقق معادلة المستوى

$$\begin{cases} a = 1 + t \\ b = 1 + t \\ c = -1 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

يعني

$$a + b - c = 0$$

و إذن $(1 + t) + (1 + t) - (-1 - t) = 0$ ومنه $3t + 3 = 0$ أي $t = -1$ وبالتالي $a = 1 - 1 = 0$ و $b = 1 - 1 = 0$

$$c = -1 - (-1) = 0$$

ومنه $(0, 0, 0)$ هو ممثلو إحداثيات مركز الدائرة (Γ)

التمرين رقم 2 :

$$\begin{aligned} (1 + i)(-3 + 6i) &= (1)(-3) + (1)(6i) \\ &+ (i)(-3) + (i)(6i) \\ &= -3 + 6i - 3i - 6 \\ &= -9 + 3i \end{aligned}$$

ولدينا

$$\begin{aligned} \frac{c-a}{b-a} &= \frac{(-2 + 5i) - (7 + 2i)}{(4 + 8i) - (7 + 2i)} = \frac{-9 + 3i}{-3 + 6i} \\ &= \frac{(1 + i)(-3 + 6i)}{-3 + 6i} \end{aligned}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = 1 + i \quad \text{أي}$$

ب- لدينا

$$1 + i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

من العلاقة $\frac{c-a}{b-a} = 1 + i$ نستنتج أن

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{و} \quad \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |1 + i|$$

$$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2} \quad \text{تكافئ} \quad \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = |1 + i|$$

أي : $AC = \sqrt{2} AB$

$$\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{المتساوية}$$

وهذا يعني أن $\frac{\pi}{4}$ قياسا للزاوية الموجهة $(\vec{AB}, \vec{AC})$ 2-أ- لنحدد الصيغة التحليلية للدوران R الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$z' - b = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - b)$$

لدينا

$$z' - b = i(z - b) \Leftrightarrow z' = iz + b(1 - i)$$

أي

$$\text{لدينا} \quad R(A) = D$$

$$z_D = i(a) + b(1 - i) = i(7 + 2i) + (4 + 8i)(1 - i)$$

$$z_D = 7i - 2 + 4 + 8i - 4i + 8 = 10 + 11i \quad \text{أي}$$

$$\frac{d-c}{b-c} = \frac{10 + 11i + 2 - 5i}{4 + 8i + 2 - 5i} = \frac{12 + 6i}{6 + 3i}$$

ب- لدينا

$$= \frac{6(2 + i)}{3(2 + i)} = 2$$

وبما أن $\frac{d-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ فإن النقط B و C و D مستقيمية .

التمرين رقم 3 :

1- لتحقيق الحدث A نسحب كرتين من بين الخمس كرات الحمراءو كرتين من بين الثلاثة كرات الخضراء : $P(A) = \frac{C_5^2 \cdot C_3^2}{C_{10}^4}$ وبما أن $C_3^2 = C_3^1 = 3$ و $C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5 \times 4^2}{2} = 10$ و $C_{10}^4 = \frac{10!}{4!6!} = \frac{10^3 \cdot 9^2 \cdot 8 \cdot 7}{4 \times 3 \times 2} = 210$ فإن : $P(A) = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{10 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{7}$ - لتحقيق الحدث B نسحب 4 كرات من بين الكرات الثمانية الغيرالبيضاء فنجد : $P(B) = \frac{C_8^4}{C_{10}^4}$ وبما أن $C_8^4 = \frac{8!}{4!4!} = \frac{8^2 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2} = 2.7.5$ فإن : $P(B) = \frac{2 \cdot 7 \cdot 5}{10 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{1}{3}$

2- أ- بما أننا نسحب أربعة كرات ولدينا في الكيس كرتين بيضاويتين

من بين 8 كرات فإنه يمكن الحصول إما على كرة واحدة بالضبط أو

على كرتين بيضاويتين بالضبط أو عدم الحصول على أية كرة بيضاء

من بين الكرات المسحوبة وبذلك يكون $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ ب- $(X=1)$ هو الحدث الحصول بالضبط على كرة واحدة بيضاء

من بين الكرات الأربعة المسحوبة

 $P(X=1) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^3}{C_{10}^4}$ وبما أن $C_8^3 = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2} = 8.7$ و $C_2^1 = 2$ فإن $P(X=1) = \frac{\text{Card}(X=1)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 7}{10 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{8}{15}$ - $(X=2)$ هو الحدث الحصول بالضبط على كرتين بيضاويتين من

بين الكرات الأربعة المسحوبة إذن :

 $P(X=2) = \frac{C_2^2 \cdot C_8^2}{C_{10}^4}$ وبما أن $C_8^2 = \frac{8!}{2!6!} = \frac{8^4 \times 7}{2} = 4.7$ و $C_2^2 = 1$ فإن : $P(X=2) = \frac{1 \cdot 4^2 \cdot 7}{10^5 \cdot 3 \cdot 7} = \frac{2}{15}$ - $(X=0)$ هو الحدث B إذن $P(X=0) = P(B) = \frac{1}{3}$ نلخص قانون احتمال X في الجدول التالي :

X	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{2}{15}$

نلاحظ أن

$$\frac{1}{3} + \frac{8}{15} + \frac{2}{15} = \frac{5+8+2}{15} = \frac{15}{15} = 1$$

التمرين رقم 4 :

1- لدينا لكل n من IN^*

$$5 - u_{n+1} = 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{50 - 5u_n - 25}{5 + (5 - u_n)}$$

$$= \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$$

- لنبين بالترجع أن $5 - u_n > 0$ لكل n من IN^* لدينا $u_1 = 0$ إذن $5 - u_1 = 5 > 0$ نفترض أن $5 - u_n > 0$ ونبين أن $5 - u_{n+1} > 0$

$$5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$$

رأينا في السؤال السابق

وحسب افتراض التراجع نجد أن : $5 - u_{n+1} > 0$ وبالتالي : $5 - u_n > 0$ لكل n من IN^* 2- أ- لتكن n من IN^* لدينا :

$$v_{n+1} = \frac{5}{5 - u_{n+1}} = \frac{5(5 + (5 - u_n))}{5(5 - u_n)} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$$

- لدينا لكل n من IN^* :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n} = \frac{10 - 5 - u_n}{5 - u_n} = 1$$

ب- لدينا $v_{n+1} - v_n = 1$ وهذا يعني أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول

$$v_1 = \frac{5}{5 - u_1} = 1 \text{ ومنه فإن}$$

$$v_n = v_1 + (n-1)(1) = 1 + n - 1 = n$$

إذن $v_n = n$ لكل n من IN^*

و منه نستنتج أن f تزايدية على كل من المجالين $]-\infty, 0]$ و $[2, +\infty[$ وأن f تناقصية على المجال $[0, 2]$
ج- جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$ يكون كالتالي :

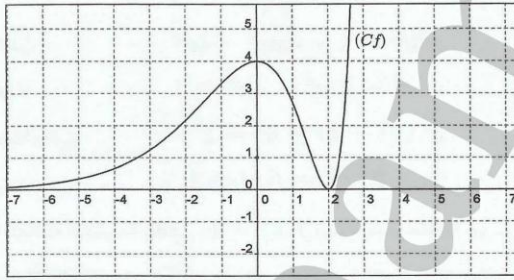
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	4	0	$+\infty$

4- أ- لدينا : $f'(x) = x^2 e^x - 2xe^x$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2 e^x - 2xe^x)' \\ &= (x^2)' e^x + (x^2)(e^x)' - 2((x)' e^x + x(e^x)') \\ &= 2xe^x + x^2 e^x - 2e^x - 2xe^x \\ &= x^2 e^x - 2e^x = (x^2 - 2)e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= 0 \quad \text{تكافئ} \quad f''(x) = 0 \quad \text{إذن} \\ x &= -\sqrt{2} \quad \text{أو} \quad x = \sqrt{2} \quad \text{تكافئ} \end{aligned}$$

و منه نستنتج أن للمنحنى (C) نقطتي انعطاف .



5- أ- الدالة H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{لدينا لكل } x \text{ من } \mathbb{R} \quad H'(x) &= (x-1)' e^x + (x-1)(e^x)' = e^x + (x-1)e^x \\ H'(x) &= e^x + xe^x - e^x = xe^x \end{aligned}$$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة $h: x \rightarrow xe^x$ على $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= [(x-1)e^x]_0^1 \\ &= (1-1)e^1 - (0-1)e^0 = 1 \end{aligned}$$

-لدينا $v_n = \frac{5}{5-u_n}$ إذن $5-u_n = \frac{5}{v_n}$

و منه $u_n = 5 - \frac{5}{v_n}$ لكل n من $\mathbb{N}^*$

ج- لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 5 - \frac{5}{v_n} = 5$

التمرين رقم 5 :

1- أ- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 e^x = +\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$)

ب- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 \frac{e^x}{x} = +\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$)

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

فإن المنحنى (C) يقبل ، بجواره $+\infty$ ، فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب .

2- أ- ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-2)^2 e^x = (x^2 - 4x + 4)e^x \\ &= x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x \end{aligned}$$

ب- بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

فإن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

فإن المستقيم الذي معادلته $(y=0)$ مقارب أفقي للمنحنى (C) .

3- أ- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= [(x-2)^2 e^x]' = [(x-2)^2]' e^x + (x-2)^2 [e^x]' \\ &= 2(x-2)e^x + (x-2)^2 e^x \\ &= 2xe^x - 4e^x + x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x \\ &= x^2 e^x - 2xe^x = x(x-2)e^x \end{aligned}$$

ب- إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x(x-2)$ نلخص إشارة

في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

$$\begin{cases} u'(x) = 2x \\ v(x) = e^x \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \begin{cases} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^x \end{cases} \quad \text{ب- نضع:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 e^x dx &= [x^2 e^x]_0^1 - 2 \int_0^1 x e^x dx & \text{إذن} \\ &= (1)^2 e^1 - (0)^2 e^0 - 2(1) \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

ج- لدينا وحدة حساب المساحة هي $1cm^2$

ومنه مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) ومحور الأفصائل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x=0$ و $x=1$ هي :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx \, cm^2 &= \int_0^1 (x-2)^2 e^x dx \quad (f(x) > 0) \\ &= \int_0^1 x^2 e^x dx - 4 \int_0^1 x e^x dx + 4 \int_0^1 e^x dx \\ &= e - 2 - 4(1) + 4[e^x]_0^1 = e - 2 - 4 + 4(e - 1) \\ \int_0^1 f(x) dx \, cm^2 &= 5(e - 2)cm^2 & \text{إذن:} \end{aligned}$$

$$x^2 = \frac{1}{e^x} + 4x - 4 \quad \text{6- المعادلة المقترحة تكافئ}$$

$$x^2 = \frac{1 + 4xe^x - 4e^x}{e^x} \quad \text{تكافئ:}$$

$$x^2 e^x = 1 + 4xe^x - 4e^x \quad \text{تكافئ}$$

$$x^2 e^x - 4xe^x + 4e^x = 1 \quad \text{ومنه}$$

$$e^x (x^2 - 4x + 4) = 1 \quad \text{وهذا يعني}$$

$$(x - 2)^2 e^x = f(x) = 1 \quad \text{أي:}$$

- المعادلة المقترحة تكافئ: $f(x) = 1$ ومنه عدد حلولها هو عدد
نقط تقاطع المنحنى (C) والمستقيم الذي معادلته $y=1$ من خلال
المنحنى نستنتج أن هناك 3 نقط .