

تصحيح الإمتحان المقترح رقم 4

$$0 < u_1 \leq \frac{1}{3}u_0 : 0 \text{ من أجل}$$

$$0 < u_2 \leq \frac{1}{3}u_1 : 1$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$0 < u_n \leq \frac{1}{3}u_{n-1} : (n-1)$$

الجداء طرف بطرف

$$0 < u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_{n-1} \cdot u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u_0 \cdot u_1 \cdot \dots \cdot u_{n-1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot u_0 \text{ ومنه}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ يعني أن}$$

$$\left(-1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ وبما أن}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \text{ فإن}$$

تذكير: إذا كانت $(\forall n \geq n_0) ; v_n \leq u_n \leq w_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \text{ و}$$

التمرين رقم 2 :

1- لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0, 1, -1)$ عن المستوى (P)

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

ب- (S) مماسة للمستوى (P) $d(\Omega, (P)) = r \longleftrightarrow$

$(r \text{ شعاع الفلكة})$

$$r = \sqrt{2} \text{ فإن } d(\Omega, (P)) = \sqrt{2} \text{ وبما أن}$$

$$\Omega M^2 = r^2 \longleftrightarrow M(x, y, z) \in (S)$$

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = (\sqrt{2})^2 \longleftrightarrow$$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 2z = 0 \longleftrightarrow$$

2- أ- لنحدد $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$

لدينا $\overline{AB}(-1, 1, -1)$ و $\overline{AC}(0, -1, 0)$ ومنه

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = (1; 0; -1) = \vec{i} - \vec{k}$$

لدينا $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ إذن النقط A و B و C غير مستقيمية.

التمرين رقم 1 :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} \text{ و } u_0 = 1 \text{ لدينا}$$

1- أ- لنبين أن بالترجع أنه لكل $n \geq 0$ لدينا $u_n > 0$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 1$ ومنه $u_0 > 0$

نفترض أن $u_k > 0$ من أجل k معلوم ولنبين أن $u_{k+1} > 0$

$$\text{نعلم أن } u_{k+1} = \frac{u_k^3}{3u_k^2 + 1} \text{ و } u_k > 0 \text{ (حسب الافتراض)}$$

$$\text{يعني أن } u_k^3 > 0 \text{ و } 3u_k^2 + 1 > 0 \text{ إذن } u_{k+1} > 0$$

$$\text{ومنه نستنتج أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0$$

$$\text{ب- لنبين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} - u_n$$

$$= \frac{u_n^3 - 3u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1} = \frac{-2u_n^3 - u_n}{3u_n^2 + 1}$$

$$\text{بما أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \text{ فإن } -2u_n^3 - u_n < 0$$

$$\text{ومنه } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - u_n < 0$$

وهذا يعني أن (u_n) تناقصية

ج- لدينا (u_n) تناقصية ومصفورة بالعدد 0

إذن (u_n) متقاربة

$$2- \text{أ- لنبين أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

$$u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{u_n^3}{3u_n^2 + 1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{3u_n^3 - u_n(3u_n^2 + 1)}{3(3u_n^2 + 1)}$$

$$u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n = \frac{-u_n}{3(3u_n^2 + 1)} < 0 \text{ (لأن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \text{)}$$

$$\text{ومنه } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

$$\text{ب- لنستنتج أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{نعلم أن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 0 \text{ و}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

ج- * لنكتب على الشكل المثلي العدد العقدي $\frac{a-c}{b-c}$ لدينا

$$\frac{a-c}{b-c} = \frac{2-2i\sqrt{3}-8}{2+2i\sqrt{3}-8} = \frac{-6-2i\sqrt{3}}{-6+2i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{-2(3+i\sqrt{3})}{-2(3-i\sqrt{3})} = \frac{(3+i\sqrt{3})^2}{12}$$

$$= \frac{6+6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبما أن $\frac{a-c}{b-c} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$ فإن $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$

* طبيعة المثلث ABC :

لدينا : $\frac{a-c}{b-c} = \left[1, \frac{\pi}{3}\right]$

$\Leftrightarrow \left|\frac{a-c}{b-c}\right| = 1$ و $\arg\left(\frac{a-c}{b-c}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$\Leftrightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

إذن ABC مثلث متساوي الأضلاع

3- لنبين أن $Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + 4 - 4i\sqrt{3}$

لدينا $r(M) = M' \Leftrightarrow Z' - c = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - c)$

$\Leftrightarrow Z' - 8 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(Z - 8)$

$\Leftrightarrow Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - 4 - 4i\sqrt{3} + 8$

$\Leftrightarrow Z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z + 4 - 4i\sqrt{3}$

ب- لنتحقق من أن $r(B) = A$

$$\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z_B + 4 - 4i\sqrt{3}$$

$$= \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 + 2i\sqrt{3}) + 4 - 4i\sqrt{3}$$

$$= (1 + i\sqrt{3})^2 + 4 - 4i\sqrt{3}$$

$$= 1 - 3 + 2i\sqrt{3} + 4 - 4i\sqrt{3} = 2 - 2i\sqrt{3}$$

$$a = Z_A$$

إذن $r(B) = A$

التمرين رقم 4 :

1- (الكيس U_1)

1	2	2
1	2	2

ليكن Ω_1 كون الإمكانات فإن :

$\text{Card}\Omega_1 = C_6^1 = 6$

* احتمال الحدث A : لدينا $\frac{1}{3}$ $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega_1} = \frac{C_2^1}{6} = \frac{1}{3}$

ب- نعلم أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على المستوى (ABC)

إذن $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow M(x, y, z) \in (ABC)$

$(ABC): x - z - 3 = 0 \Leftrightarrow$

3- أ- لنحسب مسافة Ω عن المستوى (ABC)

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|0 + 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} = r$$

ومنه (ABC) مماس للفلكة (S)

$\overrightarrow{\Omega C}(1, 0, -1)$

ب- لدينا

ومنه $\Omega C = \sqrt{(1)^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = r$

إذن نقطة تماس (S) والمستوى (ABC) هي النقطة C.

التمرين رقم 3 :

1- لنحل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة :

$$z^2 - 4z + 16 = 0$$

$\Delta = 16 - 64 = -48$

لدينا

ومنه $Z_1 = \frac{4 + i\sqrt{48}}{2} = \frac{4 + 4i\sqrt{3}}{2} = 2 + 2i\sqrt{3}$

$Z_2 = \overline{Z_1} = 2 - 2i\sqrt{3}$

$S = \{2 - 2i\sqrt{3}; 2 + 2i\sqrt{3}\}$ إذن

2- أ- لنكتب على الشكل المثلي الأعداد العقدية a و b و c :

لدينا $b = 2 + 2i\sqrt{3}$ و $c = 8 = [8, 0]$

إذن $|b| = \sqrt{4 + 12} = 4$ أي :

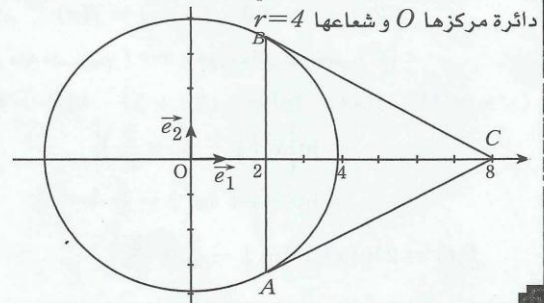
$b = 4\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left[4; \frac{\pi}{3}\right]$

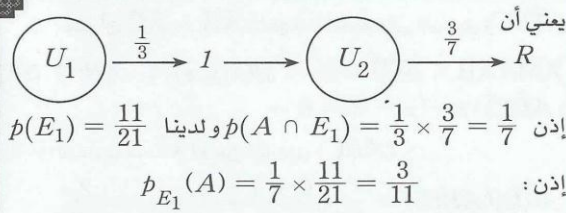
$a = \overline{b} = \left[4; -\frac{\pi}{3}\right]$

ولدينا :

ب- تمثيل النقط A و B و C :

(نعمد في ذلك على الشكل المثلي) النقطتان A و B تنتميان إلى





التمرين رقم 5 :

لدينا $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

1- أ- لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}) (x-1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$

ب- بما أن $(\forall x \in \mathbb{R}) (x-1)^2 \geq 0$ و $1 > 0$ فإن $D_f = \mathbb{R}$ ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 2x + 2 > 0$

* $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 2) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - 2x + 2) = +\infty$

2- لنبين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(2-x) = f(x)$ لدينا

$f(2-x) = \ln[(2-x)^2 - 2(2-x) + 2]$

$= \ln[4 - 4x + x^2 - 4 + 2x + 2]$

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(2-x) = \ln(x^2 - 2x + 2) = f(x)$

تذكير: يكون المستقيم ذو المعادلة $x=a$ محور تماثل لمنحنى الدالة f إذا وفقط إذا تحقق الشرطان

$\forall x \in D_f ; (2a-x) \in D_f$

و $\forall x \in D_f ; f(2a-x) = f(x)$

إذن $(\forall x \in \mathbb{R})$ لدينا $(2-x) \in \mathbb{R}$

ثم $f(2-x) = f(2 \times 1 - x) = f(x)$

ومنه المستقيم $x=1$ محور تماثل للمنحنى (C) .

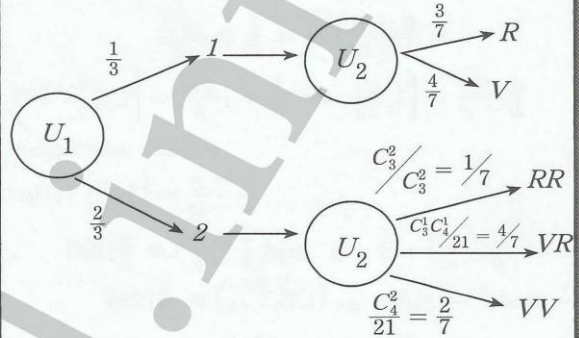
3- أ- لدينا $(\forall x \geq 1) ; f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$

$= \ln\left[x^2\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)\right]$

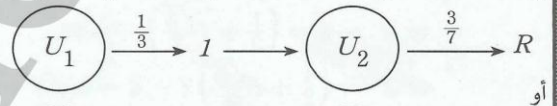
$= \ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

$f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$

* احتمال الحدث B : لدينا $P(B) = \frac{\text{Card}B}{\text{Card}\Omega_1} = \frac{C_4^1}{6} = \frac{2}{3}$

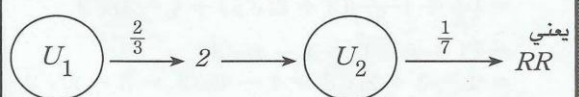


أ- E_1 هو الحدث « الحصول على كرة واحدة بالضبط حمراء » يتحقق E_1 عندما نحصل على كرة 1 من U_1 و كرة حمراء من U_2 أو كرة 2 من U_1 و كرتين مختلفتي اللون من U_2 يعني:



ومنه $p(E_1) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{21}$

* E_2 هو حدث « الحصول على كرتين بالضبط لونهما أحمر »



ومنه $p(E_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{2}{21}$

ب- في هذا السؤال لدينا احتمالا شرطيا بحيث E_1 حدث محقق:

إذن $p_{E_1}(A) = \frac{p(A \cap E_1)}{p(E_1)}$

$A \cap E_1$ حدث الحصول على كرة رقم 1 من U_1 و كرة واحدة حمراء من U_2

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0
تغير (C)				

6- إنشاء المنحنى (C) :

7- أ- h هي قصور الدالة f على المجال $[1, +\infty[$
 إذن h متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$
 ومنه h تقبل دالة عكسية h^{-1} من المجال
 $f([1, +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty[$
 نحو المجال $[1, +\infty[$
 ب- نضع $y = h^{-1}(x)$ $x \in J$; $y \in [1, +\infty[$
 $h(y) = x \iff y = h^{-1}(x)$
 $\ln(y^2 - 2y + 2) = x \iff$
 $y^2 - 2y + 2 = e^x \iff$
 $(y-1)^2 = e^x - 1 \iff$
 $e^x - 1 \geq 0$ فإن $x \in J$ بما أن
 $y - 1 \geq 0$ فإن $y \in [1, +\infty[$ و
 $y - 1 = \sqrt{e^x - 1} \iff (y-1)^2 = e^x - 1$ إذن
 $y = 1 + \sqrt{e^x - 1} \iff$
 يعني $(\forall x \in J) ; h^{-1}(x) = 1 + \sqrt{e^x - 1}$

($x \in [1, +\infty[$ لأن)
 $f(x) = 2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right)$
 ب- استنتاج
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = 0$
 لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
 و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}\right) = \ln(1) = 0$
 ومنه نستنتج أن (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاسيل بجوار $+\infty$
 4- أ- لدينا f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها مركبة من دالتين .
 $x \mapsto x^2 - 2x + 2$ حدودية و
 $x \mapsto \ln(x)$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) x^2 - 2x + 2 > 0$ إذن
 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = \frac{(x^2 - 2x + 2)'}{x^2 - 2x + 2} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^2 + 1}$
 بما أن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - 2x + 2 > 0$
 فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x-1)$
 ومنه : $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$
 $f'(x) \leq 0 \iff x \leq 1$
 ب- جدول تغيرات الدالة f على $\mathbb{R}$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

5- أ- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا f' دالة جذرية معرفة على $\mathbb{R}$
 إذن f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:
 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f''(x) = 2 \cdot \frac{(x-1)(x^2 - 2x + 2) - (x-1)(x^2 - 2x + 2)'}{(x^2 - 2x + 2)^2}$
 $= \frac{2[x^2 - 2x + 2 - 2(x-1)^2]}{(x^2 - 2x + 2)^2} = \frac{2[-x^2 + 2x]}{(x^2 - 2x + 2)^2}$
 $= \frac{2x(2-x)}{(x^2 - 2x + 2)^2}$
 ب- لدينا $(x^2 - 2x + 2)^2 > 0$
 إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x(2-x)$ ومنه نجد :