

ومنه : $\frac{d}{b_n} - c_n$
 أي : $d/2$ ومنه $d=1$ أو $d=2$
 وبما أن b_n و c_n فرديان فإن $d=1$
 نضع : $d' = c_n \wedge 2$
 إذن : d'/c_n و $d'/2$
 ومنه : $d' = 1$ أو $d' = 2$
 وبما أن c_n فردي فإن $d'=1$
 خلاصة : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2 = 1$
 * بما أن : $b_n \wedge c_n = 1$
 فإن b_n و c_n أوليان فيما بينهما .
 2- لدينا : $c_n = b_n - 2$
 $= 2 \cdot 10^n + 1 - 2$
 $= 2 \cdot 10^n - 1$
 $= 2(10^n - 1) + 1$
 ومنه : $1 = c_n - 2(10^n - 1)$
 $= c_n - (b_n - c_n)(10^n - 1)$
 أي : $1 = c_n - b_n(10^n - 1) + c_n(10^n - 1)$
 $= c_n(1 + 10^n - 1) + b_n(1 - 10^n)$
 $= c_n(10^n) + b_n(1 - 10^n)$
 ومنه $y_n = 10^n$ و $x_n = 1 - 10^n$
 ولدينا : $y_n \in \mathbb{Z}$ و $x_n \in \mathbb{Z}$
 و $b_n x_n + c_n y_n = 1$
 وهذا هو المطلوب .

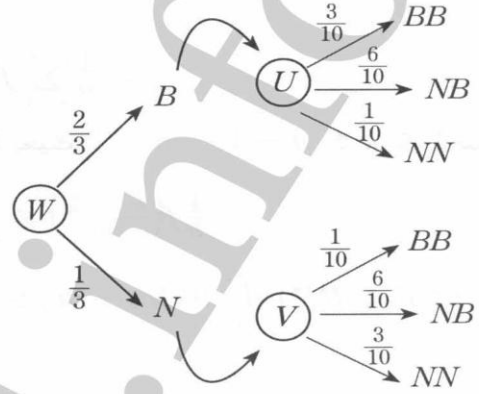
التمرين الثالث :

I- 1- * لنتحقق من أن : $\forall (a, b) \in \mathbb{J}^2$, $1 + ab > 0$
 لدينا : $\forall (a, b) \in \mathbb{J}^2$, $|a| < 1$ و $|b| < 1$
 ومنه : $|a| \cdot |b| < 1$

Achamel.info

التمرين الأول :

نعتبر شجرة الإمكانات التالية :



1- احتمال السحب من الصندوق U هو :

$$p(U) = p(B) = \frac{2}{3}$$

2- احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في الأخير هو :

$$p(BB) = p(B) \cdot p_B(BB) + p(N) \cdot p_N(BB)$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{10} = \frac{7}{30}$$

3- قيم X هي 2, 1, 0

قانون احتمال X هو :

$$p(X = 0) = p(B) \cdot p_B(NN) + p(N) \cdot p_N(NN)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$$

$$p(X = 1) = p(B) \cdot p_B(NB) + p(N) \cdot p_N(NB)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{10} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$$

$$p(X = 2) = p(BB) = \frac{7}{30}$$

التمرين الثاني :

1- * لنبين أن : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$

نضع : $d = b_n \wedge c_n$

إذن : d/c_n و d/b_n

$$= \frac{\frac{a+b+c+abc}{1+ab}}{\frac{1+ab+(a+b)c}{1+ab}} = \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

$$a * (b * c) = \frac{a + (b * c)}{1 + a.(b * c)}$$

$$= \frac{a + \frac{b+c}{1+bc}}{1 + a.\frac{b+c}{1+bc}}$$

$$= \frac{(a + abc + b + c) \frac{1}{1+bc}}{\frac{1+bc+ab+ac}{1+bc}}$$

$$= \frac{a+b+c+abc}{1+ab+ac+bc}$$

$$a * (b * c) = (a * b) * c \quad \text{وبالتالي نجد :}$$

$$a * x = a, \quad a \in J \quad \text{ب- لنحل في } J \text{ المعادلة :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+x}{1+ax} = a, \quad a \in J$$

$$\Leftrightarrow a+x = a + a^2x$$

$$\Leftrightarrow x = a^2x$$

$$\Leftrightarrow x(1-a^2) = 0$$

$$\text{وبما أن } 1-a^2 \neq 0 \text{ فإن :}$$

$$\frac{a+x}{1+ax} = a \Leftrightarrow x = 0$$

ومن العنصر المحايد هو 0

ج- لنبين أن $(J, *)$ زمرة تبادلية

* لدينا : القانون * تجميعي

* القانون * تبادلي

* يوجد عنصر محايد في G هو 0

يكفي إذن أن نبين أن كل عنصر a من J يقبل ممتثلا في

$(J, *)$.

ليكن a من J نعتبر المعادلة في J التالية :

$$\Leftrightarrow \frac{a+x}{1+ax} = 0$$

$$\Leftrightarrow a+x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -a$$

$$\text{أي : } |ab| < 1 \quad \text{أي : } -1 < ab < 1 \quad \text{ومنه : } 1+ab > 0$$

* استنتاج :

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad -1 < a < 1 \text{ و } -1 < b < 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$1 - a * b = 1 - \frac{a+b}{1+ab} = \frac{1+ab-(a+b)}{1+ab}$$

$$= \frac{1-b+a(b-1)}{1+ab} = \frac{(1-b)(1-a)}{1+ab}$$

$$\text{وبما أن } 1-b > 0 \text{ و } 1-a > 0 \text{ و } 1+ab > 0$$

$$\text{فإن : } 1 - a * b > 1 \quad \text{أي : } a * b < 1$$

$$\text{و } -1 - a * b = -1 - \frac{a+b}{1+ab}$$

$$= \frac{-1-ab-a-b}{1+ab} = -\frac{(1+b)+a(1+b)}{1+ab}$$

$$= -\frac{(1+b)(1+a)}{1+ab}$$

$$\text{وبما أن } 1+ab > 0 \text{ و } 1+b < 0 \text{ و } 1+a < 0$$

$$\text{فإن : } -1 - a * b < 0 \quad \text{أي : } -1 < a * b$$

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad a * b \in J \quad \text{نتيجة :}$$

ومن المطلوب .

2- أ- * لنبين أن القانون * تبادلي، أي :

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad a * b = b * a$$

لدينا :

$$\forall (a,b) \in J^2, \quad a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

$$= \frac{b+a}{1+ba} = b * a$$

ومن المطلوب .

* لنبين أن القانون * تجميعي أي :

$$\forall (a,b,c) \in J^2, \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

$$(a * b) * c = \frac{(a * b) + c}{1 + (a * b)c}$$

$$= \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab}.c}$$

التمرين الرابع :

I-1 * لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 + i = 0$

نعلم أن: $(1 - i)^2 = -2i$ ومنه $-i = \frac{1}{2}(1 - i)^2$

إذن: $z^2 + i = 0 \Leftrightarrow z^2 = -i$

$$\Leftrightarrow z^2 = \frac{1}{2}(1 - i)^2$$

ومنه: $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(i - 1)$ أو $z = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

وبما أن $\text{Re}(a) > 0$ فإن $a = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$

2- أ- معيار وعمدة العدد العقدي $1 + a$

$$1 + a = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}(i - 1)$$

$$= 1 + e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 2 \cos \frac{\pi}{8} e^{-i\frac{\pi}{8}}$$

وبما أن $\cos \frac{\pi}{8} > 0$ لأن $\frac{\pi}{8} \in]0, \frac{\pi}{2}[$

$$|1 + a| = 2 \cos \frac{\pi}{8} \quad \text{فإن}$$

$$\arg(1 + a) \equiv -\frac{\pi}{8} [2\pi]$$

ب- نعلم أن: $|1 + a| = 2 \cos \frac{\pi}{8}$

$$|1 + a| = \left| 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right|$$

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \quad \text{إذن:}$$

ج- لدينا: $(1 + a)(1 - a) = 1 - a = 1 + i$

(لأن a حل للمعادلة $z^2 + i = 0$ أي $a^2 = -i$)

$$(1 - a) = \frac{1 + i}{1 + a} \quad \text{إذن}$$

$$|1 - a| = \frac{|1 + i|}{|1 + a|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}} \quad \text{ومنه:}$$

$$\arg(1 - a) \equiv \arg(1 + i) - \arg(1 + a) [2\pi]$$

$$\arg(1 - a) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} [2\pi]$$

$$\arg(1 - a) \equiv \frac{3\pi}{8} [2\pi]$$

إذن مماثل a هو $-a$.

ومنه المطلوب.

II-1 لنبين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J .

لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها خارج دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$ وقابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$\text{ولدينا: } (\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = \frac{2e^x}{(1 + e^x)^2} > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -1 \quad \text{ولدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}$ إلى $] -1, 1[$

2- لنبين أن f تشاكل من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(J^*, \perp)$

لكل (x, y) من $\mathbb{R}^*$ ، لدينا من جهة :

$$f(x \times y) = \frac{e^{x \cdot y} - 1}{e^{x \cdot y} + 1}$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$f(x) \perp f(y) = f(g(f(x)) \times g(f(y)))$$

$$= f(x \times y)$$

ومنه المطلوب.

3- لنبين أن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي.

لدينا: $(J, *)$ زمرة تبادلية و $(J^*, \perp)$ زمرة لأن $(\mathbb{R}^*, \times)$

زمرة و f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(J^*, \perp)$

وبما أن $\perp$ توزيعي بالنسبة لـ $*$ في J

فإن $(J, *, \perp)$ جسم

$$\text{وبما أن: } x \perp y = f(g(x) \times g(y))$$

$$= f(g(y) \times g(x)) = y \perp x$$

فإن $\perp$ تبادلي

إذن $(J, *, \perp)$ جسم تبادلي.

3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية .
 M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM يعني أن النقط A و B و M و M' تنتمي إلى نفس الدائرة أي متداورة
 لدينا :

$$\frac{Z_{M'} - Z_A}{Z_M - Z_A} : \frac{Z_{M'} - Z_B}{Z_M - Z_B}$$

$$= \frac{Z' - a}{Z - a} : \frac{Z' + a}{Z + a}$$

$$= \frac{Z' - a}{Z - a} \times \frac{Z' + a}{Z + a}$$

$$= \frac{Z' - a}{Z' + a} \times \frac{Z + a}{Z - a}$$

$$= -\frac{Z - a}{Z + a} \times \frac{Z + a}{Z - a} = -1 \in \mathbb{R}$$
 إذن المطلوب .

التمرين الخامس :

1-1 حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = +\infty$$
 (لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$)
 مبيانيا : (C) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x=0$
 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$$
 (لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)
 مبيانيا : (C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$
 2- دالة قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ كخارج دالتين قابلتين للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 ولدينا : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = -\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)'$

$$= \left(\frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x}\right) = -\left(\frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{\ln x - 2}{2x\sqrt{x}}$$

II- 1- لنبين أن (ON) و (OM') متعامدان .
 لدينا :

$$\frac{Z_{M'} - Z_O}{Z_N - Z_O} = \frac{Z_{M'}}{Z_N} = \frac{Z'}{Z}$$

$$\frac{Z_{M'} - Z_O}{Z_N - Z_O} = \frac{-\frac{i}{Z}}{Z} = \frac{-i}{ZZ}$$

$$\frac{Z_{M'} - Z_O}{Z_N - Z_O} = \frac{-1}{|Z|^2} i$$

$$\arg\left(\frac{Z_{M'} - Z_O}{Z_N - Z_O}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$
 إذن
 إذن :
 $(ON) \perp (OM')$

2- أ- لنبين أن : $Z' - a = i \frac{Z - a}{aZ}$

$$Z' - a = \frac{-i}{Z} - a = \frac{-i - aZ}{Z}$$

$$= i \left(\frac{-1 + iaZ}{Z} \right)$$

$$= i \left(\frac{-1 + \frac{Z}{a}}{Z} \right) = i \frac{Z - a}{aZ}$$
 لاحظ أن $\left(\begin{array}{l} a^2 + i = 0 \\ \Leftrightarrow a^2 = -i \\ \Leftrightarrow a = \frac{-i}{a} \\ \Leftrightarrow ia = \frac{1}{a} \end{array} \right)$

ب- نفترض أن $Z \neq -a$
 لدينا :

$$Z' + a = \frac{-i}{Z} + a = \frac{-i + aZ}{Z}$$

$$= \frac{-i - \frac{i}{a}Z}{Z} = \frac{-i(a + Z)}{Za}$$

$$Z' \neq -a \quad Z' + a \neq 0 \quad \text{ومنه}$$
 إذن :
 ولدينا :

$$\frac{Z' - a}{Z' + a} = \frac{\frac{i(Z - a)}{aZ}}{\frac{-i(Z + a)}{aZ}} = -\frac{Z - a}{Z + a}$$
 ومنه المطلوب .

$$\begin{aligned}
 &= f(\alpha_{n+1}) \left(1 - \frac{1}{\alpha_{n+1}}\right) \\
 &= \frac{\alpha_{n+1} - 1}{\alpha_{n+1}} f(\alpha_{n+1}) \\
 &\quad \alpha_{n+1} \in]0, 1[\quad \text{بما أن :} \\
 &\quad \frac{\alpha_{n+1} - 1}{\alpha_{n+1}} < 0 \quad \text{فإن :} \\
 &\forall x \in]0, 1[, f(x) \in]0, +\infty[\quad \text{ونعلم أن :} \\
 &\quad f(\alpha_{n+1}) > 0 \quad \text{فإن :} \\
 &\quad g_n(\alpha_{n+1}) < 0 \quad \text{وبالتالي :} \\
 &\quad \text{د- } (\alpha_n)_{n \geq 1} \text{ تزايدية قطعاً} \\
 &\quad g_n(\alpha_{n+1}) < 0 , n \geq 1 \quad \text{نعلم أن لكل} \\
 &\quad g_n(\alpha_n) = 0 \quad \text{وبما أن :} \\
 &\quad g_n(\alpha_{n+1}) < g(\alpha_n) \quad \text{فإن :} \\
 &\quad \text{ونعلم أن } g \text{ تناقصية قطعاً على }]0, 1[\\
 &\quad \text{إذن : لكل } n \geq 1 , \alpha_{n+1} > \alpha_n \\
 &\quad \text{ومنه } (\alpha_n)_{n \geq 1} \text{ متتالية تزايدية قطعاً} \\
 &\quad \text{نعلم أن : } 0 < \alpha_n < 1 , (\forall n \geq 1) \\
 &\quad \text{إذن } (\alpha_n)_n \text{ متتالية مكبورة بالعدد 1} \\
 &\quad \text{ومنه فهو متقاربة .} \\
 &\quad \text{4- أ- لدينا } (\alpha_n)_{n \geq 1} \text{ تزايدية ومنه :} \\
 &\quad 0 < \alpha_1 < \alpha_n < 1 \\
 &\quad 0 < \alpha_1 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n \leq 1 \quad \text{إذن :} \\
 &\quad 0 < \alpha_1 \leq \ell \leq 1 \quad \text{وبالتالي :} \\
 &\quad \text{ب- لتكن } n \text{ من } \mathbb{N}^* : \\
 &\quad \text{لدينا :} \\
 &\quad h(\alpha_n) = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{\ln(\alpha_n)} \\
 &\quad = -\frac{1}{2} + \frac{\ln(f(\alpha_n)\sqrt{\alpha_n})}{\ln(\alpha_n)} \\
 &\quad = -\frac{1}{2} + \frac{\ln((\alpha_n)^n \cdot (\alpha_n)^{\frac{1}{2}})}{\ln(\alpha_n)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\forall x \in]0, +\infty[\quad 2x\sqrt{x} > 0 \quad \text{بما أن} \\
 &\quad \ln x - 2 \text{ إشارة } f'(x) \text{ هي إشارة} \\
 &\quad \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = e^2 \\
 &\quad \ln x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq e^2 \\
 &\quad \ln x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq e^2 \\
 &\quad \text{ومنه } f \text{ تزايدية على المجال } [e^2, +\infty[\\
 &\quad \text{وتناقصية على المجال }]0, e^2] \\
 &\quad \text{3- أ- لنبين أن } g_n \text{ تناقصية قطعاً على }]0, 1[\\
 &\quad \text{لدينا : } g_n \text{ دالة قابلة للاشتقاق على }]0, +\infty[\text{ كمجموع دالتين} \\
 &\quad \text{قابلتين للاشتقاق على }]0, +\infty[\\
 &\quad \text{ولدينا :} \\
 &\quad g'_n(x) = f'(x) - nx^{n-1} \\
 &\quad \forall x \in]0, e^2] , f'(x) \leq 0 \quad \text{وبما أن :} \\
 &\quad \forall x \in]0, 1[, f'(x) < 0 \quad \text{فإن :} \\
 &\quad -nx^{n-1} < 0 \quad \text{و} \\
 &\quad \forall x \in]0, 1[, g'_n(x) < 0 \quad \text{إذن :} \\
 &\quad \text{ومنه } g_n \text{ تناقصية قطعاً على }]0, 1[\\
 &\quad \text{ب- لدينا : } g_n \text{ متصلة و تناقصية قطعاً على }]0, 1[\\
 &\quad \text{و } g_n(]0, 1[) =]g_n(1), \lim_{x \rightarrow 0^+} g_n(x)[\\
 &\quad =]-1, +\infty[\\
 &\quad 0 \in]-1, +\infty[\quad \text{و} \\
 &\quad \text{فإن المعادلة } g_n(x) = 0 \text{ تقبل حلاً وحيداً } \alpha_n \text{ في }]0, 1[\\
 &\quad g_n(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha_n) - \alpha_n^n = 0 \\
 &\quad \Leftrightarrow f(\alpha_n) = (\alpha_n^n) \\
 &\quad \text{ج- لنبين أن : } g_n(\alpha_{n+1}) < 0 , (\forall n \in \mathbb{N}^*) \\
 &\quad \text{لدينا :} \\
 &\quad g_n(\alpha_{n+1}) = f(\alpha_{n+1}) - (\alpha_{n+1})^n \\
 &\quad = f(\alpha_{n+1}) - \frac{1}{\alpha_{n+1}} (\alpha_{n+1})^{n+1} \\
 &\quad g_n(\alpha_{n+1}) = f(\alpha_{n+1}) - \frac{1}{\alpha_{n+1}} f(\alpha_{n+1})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\sqrt{x} \ln x + 4 - 4\sqrt{x} \\
 &= 4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x \\
 A &= \left(\int_1^{e^2} f(x) dx \right) cm^2 \\
 &= [4 - 4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \ln x]_1^{e^2} cm^2 \\
 &= 4 - 4e + 2e \ln e^2 - 4 + 4 = 4cm^2
 \end{aligned}$$

جـ -

2- أ- لدينا: f : تناقصية على المجال $]0, e^2]$

ومنه لكل x بحيث $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ نجد:

$$f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

إذن:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dx$$

أي:

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ب- حسب السؤال 2- أ) نجد:

من أجل $k=1$: $\frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$

من أجل $k=2$: $\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{2}{n}\right)$

من أجل $k=3$: $\frac{1}{n} f\left(\frac{4}{n}\right) \leq \int_{\frac{3}{n}}^{\frac{4}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right)$

...

من أجل $k=n-1$: $\frac{1}{n} f(1) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$

بجمع المتفاوتات طرفاً طرفاً نجد:

$$U_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq U_n - \frac{1}{n} f(1)$$

ومنه:

$$\frac{1}{n} f(1) - U_n \leq - \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) - U_n$$

إذن:

$$\frac{1}{n} f(1) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx \leq U_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$$

و بالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt \leq U_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} + \frac{n \ln(\alpha_n) + \frac{1}{2} \ln(\alpha_n)}{\ln(\alpha_n)} \\
 &= -\frac{1}{2} + n + \frac{1}{2} = n
 \end{aligned}$$

ج- لدينا لكل x من $]0, 1[$

$$h'(x) = \frac{1}{x} (1 - \ln(-\ln(x))) \cdot \frac{1}{(\ln x)^2}$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e^e}$$

و منه جدول تغيرات h :

x	0	$\frac{1}{e^e}$	1
$h'(x)$		-	+
$h(x)$		$-\frac{e-2}{2e}$	$+\infty$

h متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]\frac{1}{e^e}, 1[$

و بالتالي فهي تقبل دالة عكسية h .

وبما أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n) = h(1) = +\infty$

فإن: $\ell = \lim_{x \rightarrow +\infty} h^{-1}(x) = 1$

د- لدينا: $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha_n)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\alpha_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n)$

$$= f(\ell) = f(1) = 0$$

II - 1- أ- لدينا لكل x من $]0, 1[$, $\ln x < 0$

ومنه: $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} > 0$ و بالتالي $\int_x^1 f(x) dx > 0$

ولدينا: لكل x من $[1, +\infty[$, $\ln x > 0$

ومنه: $f(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}} < 0$

إذن: $\int_x^1 f(x) dx < 0$ و بالتالي: $\int_x^1 f(x) dx > 0$

وبهذا يكون $\int_x^1 f(x) dx > 0$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$

ب- نضع $\begin{cases} u = 2\sqrt{x} \\ v' = -\frac{1}{x} \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} u' = \frac{1}{\sqrt{x}} \\ v = -\ln x \end{cases}$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$:

$$\begin{aligned}
 \int_x^1 f(x) dx &= [-2\sqrt{x} \ln x]_x^1 + 2 \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\
 &= 2\sqrt{x} \ln x + 2[2\sqrt{x}]_x^1
 \end{aligned}$$

ولدينا : $g'(c) < g'(x)$ ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \frac{g(x) - g(0)}{x} < -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x}$ ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} = -\infty$ وحسب مصداق التقارب فإن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = -\infty$ وهذا يعني أن g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و المنحنى C للدالة g يقبل نصف مماس عمودي في النقطة ذات الأفصول 0 يتجه نحو الأسفل .	ج- لدينا : $\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = 4 - 4\sqrt{\frac{1}{n}} + 2\sqrt{\frac{1}{n}} \ln\left(\frac{1}{n}\right)$ $= 4 - \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \cdot \ln n$ إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt = \lim_{n \rightarrow +\infty} 4 - \frac{4}{\sqrt{n}} - \frac{4 \ln \sqrt{n}}{\sqrt{n}} = 4$ وبما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt =$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{2 \ln \sqrt{\frac{1}{n}}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} + \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t) dt$ $= 0 + 4 = 4$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 4$ التمرين السادس : 1- أ- ليكن x من المجال $[0, +\infty[$ ، لدينا : $-K(\sqrt{x}) = -\int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt = \int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2} dt = g(x)$ ب- الدالة $e^{-x^2} \mapsto \mathbb{R}$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالأخص على المجال $[0, +\infty[$ الدالة $v: x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و $v(]0, +\infty[) =]0, +\infty[$ وبالتالي الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ و أن g قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$. ج- لدينا لكل x من المجال $[0, +\infty[$: $g(x) = -K\sqrt{x}$ إذن $g'(x) = -(\sqrt{x})' K'(\sqrt{x}) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} e^{-x} < 0$ ومنه فإن الدالة g تناقصية على المجال $[0, +\infty[$ 2- أ- ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$ الدالة g متصلة وقابلة للاشتقاق على $]0, x[$ من المجال $]0, x[$ (حسب السؤال 1-ب) إن حسب مبرهنة التزايديات المنتهية يوجد C من المجال $]0, x[$ بحيث : $g(x) - g(0) = (x - 0)g'(c)$ ولدينا : $g'(c) = -\frac{1}{2\sqrt{c}} e^{-c}$
---	---