

Achamel.info

تصحيح الدورة الإستدراكية 2010

حل التمرين الثاني:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} \end{cases} \quad \text{نعتبر المتتالية}$$

1. لنبين بالترجع أن: $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$
 لدينا بالنسبة لـ $n=0$ ، $u_0 = 2 > 1$ إذن خاصية محقة
 نفترض أن $u_n > 1$ ونبين أن $u_{n+1} > 1$
 لدينا $u_n > 1$ إذن $\frac{5}{6}u_n > \frac{5}{6}$ ومنه $\frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} > \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$
 أي $u_{n+1} > 1$ ومنه المطلوب.

2. لنبين أن المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n &= \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} - u_n = -\frac{1}{6}u_n + \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{6}(1 - u_n) \end{aligned}$$

لدينا $u_n > 1$ إذن $1 - u_n < 0$
 ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$ إذن (u_n) تناقصية.
 الاستنتاج: لدينا (u_n) تناقصية ومصغرة بالعدد 1 إذن
 فهي متقاربة.

3. نضع: $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1$

(أ) لنبين أن المتتالية (v_n) هندسية ونحدد أساسها وحدها

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = u_{n+1} - 1$$

$$= \frac{5}{6}u_n + \frac{1}{6} - 1 = \frac{5}{6}u_n - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{5}{6}(u_n - 1) \quad \text{ومنه} \quad v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$$

$$\text{أي} \quad v_{n+1} = \frac{5}{6}v_n$$

وبالتالي فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{5}{6}$ وحدها

$$\text{الأول:} \quad v_0 = u_0 - 1 = 1$$

حل التمرين الأول:

$$1. \text{ أ) لدينا: } \forall x \in \mathbb{R}; \quad 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 1 + 2x}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \quad \text{ومنه المطلوب.}$$

(ب) الاستنتاج:

$$\int_0^1 \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 + \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} \right) dx$$

$$= \left[x + \ln(x^2 + 1) \right]_0^1$$

$$= (1 + \ln 2) - (0 + \ln 1) = 1 + \ln 2$$

2. أ) حساب: $\int_0^1 x e^x dx$ باستعمال مكاملة بالأجزاء

$$\text{نضع } U(x) = x \text{ و } U'(x) = 1$$

$$V(x) = e^x \text{ و } V'(x) = e^x$$

$$\text{ومنه} \quad \int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

$$= (e - 0) - \left[e^x \right]_0^1$$

$$= e - (e - 1)$$

$$= 1$$

(ب) الاستنتاج:

$$\int_0^1 (x - e^{-2x}) e^x dx = \int_0^1 (x e^x - e^{-x}) dx$$

$$= \int_0^1 x e^x dx + \int_0^1 -e^{-x} dx$$

$$= 1 + \left[e^{-x} \right]_0^1$$

$$= 1 + e^{-1} - 1$$

$$= \boxed{\frac{1}{e}}$$

تممة حل التمرين رقم 3 :

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 - \frac{2}{x} e^x = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$)

التأويل الهندسي :

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتايب بجوار $(-\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 2x - 2e^x \quad (\text{ب})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2e^x}{x^2} \right) = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{2e^x}{x^2} \right) = -\infty$$

التأويل الهندسي :

(C_f) يقبل فرعا شلجيميا اتجاهه محور الأرتايب بجوار $(+\infty)$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 + 2x - 2e^x \quad 2.$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 2x + 2 - 2e^x$$

$$f'(x) = 2(x + 1 - e^x) \quad \text{ومنه}$$

$$f'(x) = 2h(x) \quad \text{أي}$$

لدينا $h(x) \leq 0$ ومنه $f'(x) \leq 0$ ($f'(0) = 2h(0) = 0$)

ومنه جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\bigcirc$	-
$f(x)$	$+\infty$		$-\infty$

3. (أ) لدينا f متصلة على $\mathbb{R}$ وتناقصية قطعاً.

و $0 \in \mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

إذن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من $\mathbb{R}$.

تممة حل التمرين رقم 2 :

(ب) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \cdot q^n$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \quad (v_0 = 1 \text{ و } q = \frac{5}{6}) \quad v_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n$

4. (أ) لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - 1$

ومنه $u_n = v_n + 1$ ومنه $u_n = \left(\frac{5}{6}\right)^n + 1$

(ب) لدينا $1 < \frac{5}{6} < -1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^n = 0$

ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

حل التمرين الثالث:

الجزء الأول: $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = x + 1 - e^x$

1. لدينا $h'(x) = 1 - e^x$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - e^x = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^x$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

ومنه $h'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow x < 0$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$

ومنه جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$\bigcirc$	-
$h(x)$		0	

$$h(0) = 0 + 1 - e^0 = 0$$

2. الاستنتاج :

لدينا الدالة h تقبل القيمة القصوى المطلقة 0 عند 0 على

$\mathbb{R}$ ، إذن $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \leq 0$

الجزء الثاني:

$$f(x) = x^2 + 2x - 2e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x - 2e^x \quad (1. أ)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{2}{x} \right) - 2e^x = +\infty$$

تتمة حل التمرين رقم 4 :

$$B = \{(1,3); (3,1); (2,2); (3,2); (2,3); (1,1); (2,1); (1,2)\}$$

$$B = \bar{A} \text{ إذن}$$

$$p(B) = p(\bar{A}) = 1 - p(A) \text{ ومنه}$$

$$= 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

2. لدينا X المتغير العشوائي المرتبط بعدد المرات التي يظهر فيها الرقم 3 .

(أ) $X(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ (يظهر الرقم 3 مرتين أو مرة واحدة أو لا يظهر بالمرّة)

(ب) قانون احتمال المتغير العشوائي X :

$$(X=0) = \{(1,2); (2,1); (2,2); (1,1)\}$$

$$p(X=0) = \frac{2(C_3^1 \times C_2^1) + (C_2^1 \times C_2^1) + (C_3^1 \times C_3^1)}{36} \text{ ومنه}$$

$$= \frac{25}{36}$$

$$(X=1) = \{(1,3); (3,1); (2,3); (3,2)\}$$

$$p(X=1) = \frac{2[(C_3^1 \times C_1^1) + (C_2^1 \times C_1^1)]}{36} \text{ ومنه}$$

$$= \frac{10}{36}$$

$$(X=2) = \{(3,3)\}$$

$$p(X=2) = p(A) \text{ ومنه}$$

$$= \frac{1}{36}$$

(ج) حساب $E(X)$ الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X :

$$E(X) = 0 \times \frac{25}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{1}{36} = \frac{12}{36}$$

$$= \frac{1}{3}$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

لدينا $f(-2) < 0$ و $f(-2, 2) > 0$ إذن $\alpha \in]-2, 2; -2[$.

(ب) لدينا $f'(x) = 2x + 2 - 2e^x$

$$f''(x) = 2 - 2e^x$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - 2e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

ومنه :

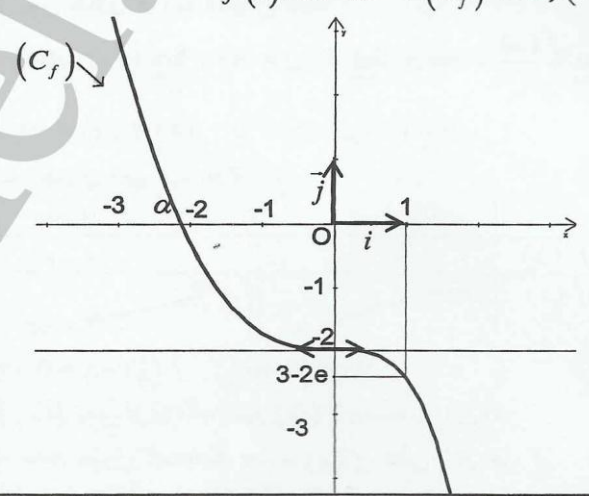
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

إذن النقطة $I(0, -2)$ هي نقطة انعطاف (C_f) ($f(0) = -2$)

(ج) لدينا $f'(0) = 0$ ولدينا معادلة المماس (T) في النقطة

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -2 \text{ هي } I$$

(د) إنشاء (C_f) : $f(1) = 3 - 2e$



حل التمرين الرابع:

1. (أ) التجربة العشوائية : رمي نرد غير مغشوش أوجهه

مرقمة: 1، 1، 1، 2، 2، 3 مرتين

ليكن Ω كون الامكانيات المرتبط بهذه التجربة .

$A = \{(3,3)\}$: "الحصول مرتين على الرقم 3" :

$$\text{card } A = C_1^1 \cdot C_1^1 = 1 ; \text{ card } \Omega = C_6^1 \cdot C_6^1 = 36$$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{1}{36}$$

(ب) B : "الحصول على رقمين جداؤهما أصغر من أو

يساوي 6".