

لنبين أن التطبيق f تقابل أي لنبين أن المعادلة : $f(x) = y$

تقبل حلا وحيدا x في R_+^* $\forall y \in G$

ليكن $y \in G$ لدينا : $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} = y$

$$\Leftrightarrow x + 2 = yx + y$$

$$\Leftrightarrow x - yx = y - 2$$

$$\Leftrightarrow x(1 - y) = y - 2 \quad (y \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{y-2}{1-y}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2-y}{y-1} > 0$$

لأن $1 < y < 2$ $(2 - y > 0$ و $y - 1 > 0)$

إذن : $\forall y \in G \exists ! x > 0 / f(x) = y$

ومنه فإن الدالة f تقابل من IR إلى G

- لنبين أن التطبيق f تشاكل من $(R_+^*, \times)$ إلى $(G, *)$

أي لنبين أن $\forall (x, y) \in IR^2 \quad f(xy) = f(x) * f(y)$

$$f(xy) = \frac{xy+2}{xy+1} \quad \text{لدينا :}$$

$$f(x) * f(y) = \left(\frac{x+2}{x+1} \right) * \left(\frac{y+2}{y+1} \right) \quad \text{ولدينا}$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}{\left(\frac{x+2}{x+1} - 1\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 1\right) + \left(\frac{x+2}{x+1} - 2\right)\left(\frac{y+2}{y+1} - 2\right)}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}{\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{1}{y+1}\right) + \left(\frac{-x}{x+1}\right)\left(\frac{-y}{y+1}\right)}$$

$$= \frac{\frac{2+xy}{(x+1)(y+1)}}{\frac{1+xy}{(x+1)(y+1)}} = \frac{xy+2}{xy+1}$$

$$= f(xy)$$

ومنه المطلوب .

خلاصة : التطبيق f تشاكل تقابلي من $(R_+^*, \times)$ إلى

$$(G, *)$$

Achamel.info

التمرين الأول :

نضع : $G =]1, 2[$

I- لدينا

$$\forall x \in]1, 2[\text{ و } \forall y \in]1, 2[$$

$$x * y = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

1- لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G

$$\forall (x, y) \in G^2$$

لدينا :

$$(x * y) - 1 = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} - 1$$

$$= \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2) - (x-1)(y-1) - (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}$$

$$= \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} > 0$$

$$x \in G \Rightarrow x - 1 > 0$$

لأن :

$$x - 2 < 0$$

$$y \in G \Rightarrow \begin{cases} y - 1 > 0 \\ y - 2 < 0 \end{cases}$$

و

$$(x-2)(y-2) > 0 \text{ و } (x-1)(y-1) > 0$$

$$\text{وبالتالي : } (x * y) - 1 > 0 \text{ أي } (x * y) > 1 \quad (\alpha)$$

ولدينا :

$$\forall (x, y) \in G^2$$

$$(x * y) - 2 = \frac{2(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} - 2$$

$$= \frac{-(x-2)(y-2)}{(x-1)(y-1) + (x-2)(y-2)} < 0$$

$$\text{إذن : } (x * y) - 2 < 0 \text{ أي } (x * y) < 2 \quad (\beta)$$

من α و β نستنتج أن : $1 < (x * y) < 2$

$$(x * y) \in G^2 \quad \forall (x, y) \in G^2 \text{ أي :}$$

ومنه فإن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .

2- لدينا التطبيق :

$$f : R_+^* \longrightarrow G$$

$$x \longrightarrow \frac{x+2}{x+1}$$

$\forall (a, b) \in IR^2 \quad M(a, b) = aI + bA \quad -2$
 $E = \{M(a, b) / (a, b) \in IR^2\}$
 لدينا : $E \neq \emptyset$ لأن $(O = oI + oA) \quad O \in E$
 لنبين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .
 لنبين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_3(IR), +, \cdot)$
 لنبين أن $(E, +, \cdot)$ جزء مستقر من $(M_3(IR), +, \cdot)$
 $\forall (a, b) \in IR^2 \quad \forall (a', b') \in IR^2$
 $M(a, b) - M'(a', b') = aI + bA - a'I - b'A$
 $= (a - a')I + (b - b')A = M''(a - a', b - b')$
 $[M(a, b) - M'(a', b')] \in E$ ومنه :
 $\forall (a, b) \in IR^2 \quad \forall \alpha \in IR$
 $\alpha M(a, b) = \alpha(aI + bA) = \alpha aI + \alpha bA$
 $= M(\alpha a, \alpha b)$
 $[\alpha M(a, b)] \in E$ ومنه :
 إذن $(E, +, \cdot)$ هو جزء مستقر من الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_3(IR), +, \cdot)$
 إذن $(E, +, \cdot)$ هو فضاء متجهي جزئي من $(M_3(IR), +, \cdot)$
 إذن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي ومنه المطلوب .

التمرين الثاني :

7 كرات $\left\{ \begin{array}{l} 3 \text{ حمراء} \\ 4 \text{ سوداء} \end{array} \right\}$

I- نسحب عشوائيا بمتابع و بإحلال أربع كرات ليكن Ω كون الامكانيات المرتبط بهذه التجربة

$X =$ عدد الكرات السوداء المسحوبة و $Card \Omega = 7^4$

ولدينا : $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1- قانون احتمال X

$$p(X = 0) = \frac{C_4^0 \cdot 4^0 \cdot 3^4}{7^4} = \frac{81}{2401}$$

ب- لدينا : $(R_+^*, \times)$ زمرة تبادلية و f تشاكل تقابلي من $(R_+^*, \times)$ إلى $(G, *)$
 فإن $(G, *)$ هي أيضا زمرة تبادلية عنصرها المحايد e هو $f(1)$
 1) هو العنصر المحايد للزمرة $(R_+^*, \times)$
 أي : $e = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2}$
 -II

1- أ- لدينا : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 ومنه : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 ولدينا : $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 ومنه $A^3 = 0$ أي $A \times A^2 = 0$

أي A قاسم للصفر في الحلقة $(M_3(IR), +, \times)$

ب- لدينا : $A^3 = 0$ ومنه $A^3 + I = I$
 أي : $A^3 + I^3 = I$
 ومنه : $\left(a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) \right) \quad \forall (a, b) \in IR^2$
 أي : $(A + I)(A^2 + A.I + I^2) = I$
 $(A + I)(A^2 - A + I) = I$
 إذن المصفوفة $(A + I)$ تقبل مقلوبا في $(M_3(IR), +, \times)$
 هو المصفوفة $A^2 - A + I$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{1}{55} = \frac{3}{385}$$

ومنه :

$$p(E) = \frac{12}{55} + \frac{3}{385} = \frac{84 + 3}{385}$$

أي :

$$p(E) = \frac{87}{385}$$

وبالتالي :

3 - ليكن $p_E(R)$ احتمال الحدث R علما أن الحدث E محقق لدينا :

$$p_E(R) = \frac{p(E \cap R)}{p(E)}$$

وبالتالي :

$$= \frac{\frac{3}{385}}{\frac{87}{385}} = \frac{3}{87}$$

التمرين الثالث :

ليكن $a \in C$ و $a \neq 1$

لتكن المعادلة (E) في C :

$$(E) : 2z^2 - 2(a-1)z + (a-1)^2 = 0$$

1 - لنبين أن

$$z_2 = \frac{(a-1)}{2}(1-i) \text{ و } z_1 = \frac{(a-1)}{2}(1+i)$$

هما حلي المعادلة (E) .

$$* 2z_1^2 - 2(a-1)z_1 + (a-1)^2$$

لدينا :

$$= 2 \frac{(a-1)^2(1+i)^2}{4} - 2 \frac{(a-1)^2(1+i)^2}{2} + (a-1)^2$$

$$= i(a-1)^2 - (a-1)^2(1+i) + (a-1)^2((1+i)^2 = 2i)$$

$$= i(a-1)^2 - (a-1)^2 - i(a-1)^2 + (a-1)^2 = 0$$

وبنفس الطريقة نبين أن :

$$* 2z_2^2 - 2(a-1)z_2 + (a-1)^2 = 0$$

$$2 - \text{نأخذ } a = e^{i\theta} \quad 0 < \theta < \pi$$

أ- إثبات المتساوية المقارحة :

$$a - 1 = e^{i\theta} - 1$$

لدينا :

$$a - 1 = (\cos \theta + i \sin \theta) - 1$$

أي :

$$a - 1 = (\cos \theta - 1) + i \sin \theta$$

$$a - 1 = -2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + i 2 \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$p(X=1) = \frac{C_4^1 \cdot 4 \times 3^3}{7^4} = \frac{432}{2401}$$

$$p(X=2) = \frac{C_4^2 \cdot 4^2 \times 3^2}{7^4} = \frac{864}{2401}$$

$$p(X=3) = \frac{C_4^3 \cdot 4^3 \times 3^1}{7^4} = \frac{768}{2401}$$

$$p(X=4) = \frac{C_4^4 \cdot 4^4 \times 3^0}{7^4} = \frac{256}{2401}$$

2 - حساب الأمل الرياضي $E(X)$

$$E(X) = 4 \cdot \left(\frac{4}{7}\right) = \frac{16}{7}$$

(قانون حدائي وسيطاه $n=4$ و $p = \frac{4}{7}$)

$n=4$ هو عدد المرات التي تعاد فيها التجربة

$p = \frac{4}{7}$ هو احتمال الحصول على كرة سوداء

II - لنبين أن $p(E \cap N) = \frac{12}{55}$

لدينا : $p(E \cap N) = p(N) \times p_N(E)$

($p_N(E)$ احتمال الحدث E علما أن الحدث N محقق)

لنحسب $p(N)$ و $p_N(E)$

$$* p(N) = \frac{C_4^1}{C_7^1} = \frac{4}{7}$$

(بعد إضافة 5 كرات سوداء إلى الصندوق)

$$* p_N(E) = \frac{A_9^3}{C_{12}^9} = \frac{21}{55}$$

$$p(E \cap N) = \frac{4}{7} \times \frac{21}{55}$$

ومنه :

$$p(E \cap N) = \frac{12}{55}$$

وبالتالي :

ومنه المطلوب .

2 - حساب $p(E)$

لدينا : $E = (E \cap N) \cup (E \cap R)$

$$p(E) = p(E \cap N) + p(E \cap R)$$

- لنحسب : $p(E \cap R)$

$$p(E \cap R) = p(R) \times p_R(E)$$

$$= \frac{3}{7} \times \frac{A_4^3}{C_{12}^3} \quad (\text{بعد إضافة 5 كرات حمراء إلى الصندوق})$$

$$Z_{C'} = i^2 + (1-i)\frac{(a+i)}{2} \quad (Z_C = i)$$

$$Z_{C'} = \frac{-2 + (1-i)(a+i)}{2}$$

$$Z_{C'} = \frac{-2 + a + i - ia + 1}{2}$$

$$= \frac{a + i - ia - 1}{2} = \frac{(a-i) + i(1-a)}{2}$$

$$Z_{C'} = \frac{(a-1)(1-i)}{2} = Z_2$$

ومنه المطلوب . $C' = Z_2$ ومنه

الصيغة العقدية للدوران r_2 :

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{2}} Z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) Z_K$$

$$= iZ + (1-i)\left(\frac{a-i}{2}\right)$$

$$Z_{A'} = iZ_A + (1-i)\left(\frac{a-i}{2}\right) \quad (Z_A = a)$$

$$Z_{A'} = ia + (1-i)\frac{(a-i)}{2}$$

$$Z_{A'} = \frac{2ia + a - i - ia - 1}{2}$$

$$= \frac{ai + a - i - 1}{2} = \frac{a(1+i) - (1+i)}{2}$$

$$= \frac{(a-1)(1+i)}{2} = Z_1$$

ومنه المطلوب . $A' = Z_1$ إذن

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{Z_1 - Z_2}{a - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(a-1)(1+i) - (a-1)(1-i)}{a-1}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(a-1)(1+i-1+i)}{(a-1)}$$

$$= \frac{1}{2} (2i) \quad \text{أي}$$

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = i \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\frac{a' - c'}{a - 1} = \frac{Z_{A'} - Z_{C'}}{Z_A - Z_{B'}} = i \quad \text{الاستنتاج :}$$

$$(A'C') \perp (AB') \quad \text{يعني :}$$

ومنه (AB') هو ارتفاع في المثلث $A'B'C'$.

$$a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

ومنه

$$a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

أي :

$$a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right)\right)$$

و بالتالي :

$$a - 1 = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\pi + \theta}{2}\right)}$$

ومنه المطلوب .

ب- الاستنتاج :

لدينا :

$$1 - i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{و} \quad 1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_1 = \frac{(a-1)}{2} (1+i) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \times \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{3\pi+\theta}{4}\right)}$$

$$Z_2 = \frac{(a-1)}{2} (1-i) = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta+\pi}{2}\right)} \times \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi+\theta}{4}\right)}$$

ومنه الشكل المثلثي للعدد Z_1 و Z_2 :

$$Z_1 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$Z_2 = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)$$

II- نفترض : $\text{Re}(a) < 0$

ولدينا : $B'(1) \quad C(i) \quad B(-i) \quad A(a)$

$$Z_J = \frac{Z_A + Z_C}{2} = \frac{a + i}{2} \quad \text{J - منتصف [AC]}$$

$$Z_K = \frac{Z_A + Z_B}{2} = \frac{a - i}{2} \quad \text{K منتصف [AB]}$$

$r_1 - 2$: الدوران الذي مركزه J وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

r_2 : الدوران الذي مركزه K وقياس زاويته $\frac{\pi}{2}$

الصيغة العقدية للدوران r_1 :

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{2}} Z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) Z_J$$

$$Z' = iZ + (1-i)\left(\frac{a+i}{2}\right)$$

$$Z_{C'} = iZ_C + (1-i)\left(\frac{a+i}{2}\right) \quad \text{ومنه}$$

$$(\forall x > 0) ; f'(x) = \frac{-(\sqrt{1+x^2 \ln^2 x})'}{(\sqrt{1+x^2 \ln^2 x})^2}$$

$$\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$$

$$f'(x) = -\frac{2x \ln^2 x + 2x^2 \cdot \frac{1}{x} \ln x}{1 + x^2 \ln^2 x}$$

$$= -\frac{2x \ln^2 x + 2x \ln x}{2(\sqrt{1+x^2 \ln^2 x})^3}$$

$$f'(x) = -\frac{x \ln x (\ln x + 1)}{(\sqrt{1+x^2 \ln^2 x})^3}$$

$$= -\frac{x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{\frac{3}{2}}}$$

ومن المطلب .

د- جدول تغيرات الدالة f

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ أو } 1 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \text{ أو } x = \frac{1}{e}$$

ومن جدول تغيرات الدالة f

x	0	$1/e$	1	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	+	0
$f(x)$	1	$\frac{e}{\sqrt{e^2+1}}$	1	0

2- لتكن F الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

أ- لنحدد دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على $[e, +\infty[$

الدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ متصلة على $[e, +\infty[$

إذن تقبل دوال أصلية على $[e, +\infty[$

$$\frac{1}{x \ln x} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{\ln' x}{\ln x}$$

إذن الدالة $x \mapsto \ln(|\ln x|)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$

التمرين الرابع :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad \begin{cases} f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} - 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

أ- إثبات أن الدالة f متصلة على اليمين في 1

وحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+(x \ln x)^2}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln^2 x = +\infty$

ب- دراسة قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x}} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}{x \sqrt{1+x^2 \ln^2 x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1 - x^2 \ln^2 x}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x} \cdot (1 + \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 \ln^2 x}{\sqrt{1+x^2 \ln^2 x} \cdot (1 + \sqrt{1+x^2 \ln^2 x})} = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1+x^2 \ln^2 x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2 x = 0$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'(0) = 0$

ج- الدالة $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

الدالة $x \mapsto 1 + x^2 \ln^2 x$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و $1 + x^2 \ln^2 x > 0$ و $\forall x > 0$

إذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

(كمركب دالتين قابلتين للاشتقاق)

د- الاستنتاج :

لدينا :

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2 \ln^2 t}} dt$$

$$= \int_0^x f(t) dt$$

$$F(x) = \int_0^e f(t) dt + \int_e^x f(t) dt$$

لدينا : $\forall x \geq e$ حسب 2 ج

$$\int_e^x f(t) dt \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x)$$

ومنه : $F(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) + \int_0^e f(t) dt$

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) = +\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

لدينا : $\forall x \geq e \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x f(t) dt \leq \ln(\ln x)$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) + \int_0^e f(t) dt \leq F(x) \leq \int_0^e f(t) dt + \ln(\ln x)$$

$\forall x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{1}{x} \int_0^e f(t) dt \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{x} \int_0^e f(t) dt + \frac{\ln(\ln x)}{x}$$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^e f(t) dt = 0$$

$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{و} \quad \int_0^e f(t) dt \in \mathbb{R} \right)$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \times \frac{\ln x}{x} = 0$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$

إذن : $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} \leq 0$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

هـ -

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$\forall x > 0 \quad F'(x) = f(x)$

$$F''(x) = f'(x) = \frac{-x \ln x (1 + \ln x)}{(1 + x^2 \ln^2 x)^{3/2}}$$

$$F''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \quad \text{أو} \quad 1 + \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \text{أو} \quad x = \frac{1}{e}$$

على $[e, +\infty[$

$$x \geq e \Leftrightarrow \ln x \geq 1 > 0$$

إذن الدالة $x \mapsto \ln(\ln x)$ هي دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ على المجال $[e, +\infty[$

ب- لدينا

$$\forall t \geq e \quad 1 + t^2 \ln^2 t \geq t^2 \ln^2 t$$

ومنه $\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \geq \sqrt{t^2 \ln^2 t}$

أي $\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \geq t |\ln t|$

علما أن $\ln t \geq 1 > 0$ فإن $t \geq e$

إذن $\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \geq t \ln t$

لدينا $t^2 \ln^2 t \geq 1$ ($t \geq e$)

إذن $1 + t^2 \ln^2 t \leq 2t^2 \ln^2 t$

ومنه $(\ln t > 1 > 0) \quad (2) \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$

من (1) و (2) نستنتج أن

$$t \ln t \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$$

ج- لدينا

$$\forall t \geq e; t \ln t \leq \sqrt{1 + t^2 \ln^2 t} \leq \sqrt{2} t \ln t$$

ومنه $\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{t \ln t} \leq \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} \leq \frac{1}{t \ln t}$

ومنه

$$\forall x \geq e \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \int_e^x \frac{1}{t \ln t} dt$$

ومنه

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [(\ln(\ln t))]_e^x \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq [(\ln(\ln t))]_e^x$$

ومنه

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\ln(\ln x) - \ln(\ln e)) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq (\ln(\ln x) - \ln(\ln e)) \quad (\ln e = 1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\ln(\ln x) - \ln(1)) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x) - \ln(1) \quad (\ln 1 = 0)$$

ومنه

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\ln x) \leq \int_e^x \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 \ln^2 t}} dt \leq \ln(\ln x)$$

ومنه المطلوب .

ب- نضع

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ و } \forall n \in [0, +\infty[\quad K_n(x) = \varphi(x) - n$$

$$K_n(0) = \varphi(0) - n = -n \leq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} K_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) - n = +\infty$$

الدالة K_n متصلة على $[0, +\infty[$

(لأن الدالة φ متصلة على $[0, +\infty[$)

$$\forall n \in [0, +\infty[\quad K'(x) = \varphi'(x) = 1 - F'(x)$$

$$= 1 - f(x) \geq 0$$

إذن K_n تزايدية قطعاً على $[0, +\infty[$

و $0 \in K_n([0, +\infty[)$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة

فإن المعادلة $K_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n

في المجال $[0, +\infty[$

ج- لنبين أن $\alpha_n \geq n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ;

لدينا α_n هو الحل الوحيد للمعادلة $\varphi(x) = n$

إذن : $\varphi(\alpha_n) = n$

أي : $\alpha_n - F(\alpha_n) = n$

ومنه : $\alpha_n = n + F(\alpha_n)$

ونعلم أن : $\forall x \geq 0 \quad F(x) \geq 0$

ومنه : $F(\alpha_n) \geq 0$

وبالتالي : $\alpha_n \geq n$

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha_n \geq n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$

4- أ- إثبات أن

$$(\forall n \geq 1) ; 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة F في المجال $[n, \alpha_n]$

نحصل على :

$$\exists C \in]n, \alpha_n[\quad F(\alpha_n) - F(n) = (\alpha_n - n)F'(C)$$

$$F(\alpha_n) - F(n) = (\alpha_n - n)f(C) \quad (\forall x \geq 0 \quad F'(x) = f(x))$$

x	0	$1/e$	1	$+\infty$	
$F''(x)$	-	0	+	0	-
تغير (C_F)					

إذن (C_F) يقبل نقطتي انعطاف أفصوليهما $1/e$ و 1

ز- إنشاء (C_F)

(C_F) يقبل فرعاً شلجيمياً اتجاهه محور الأفاصيل

($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$)

$\forall x \geq 0 \quad \varphi(x) = x - F(x) - 3$

أ- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - F(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{F(x)}{x} \right) = +\infty$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

$\forall x \geq 0 \quad \varphi'(x) = 1 - F'(x)$

$\varphi'(x) = 1 - f(x)$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0 \text{ أو } x = 1$

ولدينا : $\forall x \geq 0 \quad f(x) \leq 1$

ومنه جدول تغيرات الدالة φ

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	0	+	+
$\varphi(x)$	0		

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n} = 1 \quad \text{ومنه :} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\alpha_n} = 1$$

التمرين الخامس :

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \ln(u_n) \text{ و } u_n = \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2}$$

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \ln(u_n) \quad -1$$

$$v_n = \ln \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right)^{n^2} \quad \text{أي :}$$

$$= n^2 \ln \left(\frac{\arctan(n)}{\arctan(n+1)} \right) \quad \text{ومنه :}$$

ومنه :

$$v_n = n^2 (\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)))$$

$$\forall x > 0 \quad h(x) = \ln(\arctan x) \quad \text{-2 نضع :}$$

$$\forall x > 0 \quad h'(x) = \frac{\arctan' x}{\arctan x} = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{\arctan x} = \frac{1}{(1+x^2)\arctan x}$$

بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة h في المجال

$$[n, n+1] \quad \text{حيث } n \geq 1$$

$$(\exists c \in]n, n+1[) / \quad \text{لدينا :}$$

$$h(n) - h(n+1) = h'(c)[n - (n+1)]$$

$$\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1)) =$$

$$= \frac{1}{(1+c^2)\arctan c} \times (-1)$$

ومنه :

$$n^2 [\ln(\arctan(n)) - \ln(\arctan(n+1))] =$$

$$= \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

ومنه :

$$\forall n \geq 1 \quad v_n = \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan(c)}$$

ومنه المطلوب .

f تناقصية قطعاً على المجال $[0, +\infty[$ ومنه على $[n, \alpha_n]$

$$C \in]n, \alpha_n[\Rightarrow f(c) \leq f(n) \quad \text{إذن}$$

$$F(\alpha_n) - F(n) \leq (\alpha_n - n)f(n) \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} - \frac{F(n)}{\alpha_n} \leq \left(\frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} \right) f(n) \quad \text{ومنه :}$$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{\alpha_n} + \left(1 + \frac{\alpha}{n} \right) f(n) \quad \text{أي :}$$

$$\frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{\alpha_n} + f(n) - \frac{\alpha}{n} f(n) \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

$$\frac{F(n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} \quad \text{ومنه } \alpha_n \geq n \quad \text{لأن :}$$

$$-\frac{\alpha}{n} \leq 0 \quad \text{و}$$

$$(*) \quad \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n) \quad \text{إذن :}$$

$$\forall x \geq 0 \quad F(x) \geq 0 \quad \text{ونعلم أن :}$$

$$(**) \quad \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \geq 0 \quad \text{ومنه :}$$

من (*) و (**) نستنتج أن :

$$0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

ب- لدينا حسب (4) أ-

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

$$\varphi(\alpha_n) = n \Leftrightarrow \alpha_n - F(\alpha_n) = n \quad \text{ولدينا :}$$

$$\Leftrightarrow F(\alpha_n) = \alpha_n - n$$

$$0 \leq \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n) \quad \text{ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \frac{\alpha_n - n}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{n}{\alpha_n} \leq \frac{F(n)}{n} + f(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F(n)}{n} = 0 \quad \text{ولدينا :}$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n}{\alpha_n} \leq 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n}{\alpha_n} = 0 \quad \text{أي :}$$

3- لدينا : $C \in]n, n+1[/ n < c < n+1$

ومنه : $n^2 < c^2 < (n+1)^2$

ومنه : $1 + n^2 < 1 + c^2 < 1 + (n+1)^2$

ولدينا : $\arctan(n) < \arctan(c) < \arctan(n+1)$

(الدالة $\arctan$ تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$)

ومنه :

$(1+n^2)\arctan(n) < (1+c^2)\arctan(c) < (1+(n+1)^2)\arctan(n+1)$

ومنه :

$\frac{1}{(1+(1+n^2))\arctan(n+1)} < \frac{1}{(1+c^2)\arctan c} < \frac{1}{(1+n^2)\arctan n}$

ومنه :

$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan n} < \frac{-n^2}{(1+c^2)\arctan c} < \frac{-n^2}{(1+(1+n^2))\arctan(n+1)}$

$\frac{-n^2}{(1+n^2)\arctan n} < v_n < \frac{-n^2}{(1+(1+n^2))\arctan(n+1)}$

4- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{1+n^2} = -1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-n^2}{1+(1+n^2)} = -1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$

و

$-\frac{2}{\pi} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n \leq -\frac{2}{\pi}$

إذن :

أي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = -\frac{2}{\pi}$ ولدينا : $u_n = e^{v_n}$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = e^{-\frac{2}{\pi}}$ أي : $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{v_n}$