

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2008

التمرين رقم 1 :

1- لنبين أن مركز (S) هو $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها هو $r = \sqrt{3}$
لدينا معادلة (S) هي

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + y^2 + z^2 - 4z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + y^2 + (z-2)^2 - 4 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = 3 = (\sqrt{3})^2$$

$$M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = (\sqrt{3})^2$$

ومنه مركز (S) هو $\Omega(1,0,2)$ وشعاعها هو $r = \sqrt{3}$

* لنتحقق من أن A تنتمي إلى (S) :

لدينا $A(0, -1, 1)$ ،

نعوض إحداثيات A في معادلة (S) فنجد :

$$(0-1)^2 + (-1)^2 + (1-2)^2 = 3$$

$$1 + 1 + 1 = 3 \text{ وهذا صحيح .}$$

إذن A تنتمي إلى الفلكة (S) .

2- * لنحدد مثلث إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$

لدينا : $\overrightarrow{OB}(1, -1, 0)$ و $\overrightarrow{OA}(0, -1, 1)$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} ; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}(1, 1, 1)$$

* معادلة المستوى (OAB) :

$$M(x,y,z) \in (OAB) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \cdot (\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}) = 0 :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 0$$

(لأن المتجهة $\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$ منتظمة على (OAB))

3- لنبين أن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A :

لدينا :

$$d(\Omega, (OAB)) = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = r$$

إذن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) ، وبما أن $A \in (OAB)$

و $A \in (S)$ فإن نقطة التماس هي النقطة A .

التمرين رقم 2 :

1- لنحل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة :

$$z^2 - 6z + 34 = 0$$

$$\Delta = 36 - 136 = -100$$

$$z_1 = \frac{6 + i\sqrt{100}}{2} = 3 + 5i$$

$$z_2 = \frac{6 - i\sqrt{100}}{2} = 3 - 5i$$

$$S = \{3 - 5i; 3 + 5i\}$$

2- أ- * لنبين أن $z' = z + 4 - 2i$:

$$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow Z_{MM'} = Z_u$$

$$\Leftrightarrow Z_{M'} - Z_M = Z_u$$

$$\Leftrightarrow z' - z = 4 - 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = z + 4 - 2i \text{ وهذا هو المطلوب .}$$

* لنتحقق من أن $T(A) = C$

$$Z_A = 3 + 5i \text{ و } Z_C = 7 + 3i$$

$$Z_A + 4 - 2i = 3 + 5i + 4 - 2i$$

$$= 7 + 3i = Z_C$$

ومنه النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة T .

$$\frac{b-c}{a} = 2i \text{ ب- لنبين أن } \frac{b-c}{a} = 2i$$

$$\frac{b-c}{a} = \frac{(3-5i)-(7+3i)}{(3+5i)-(7+3i)}$$

$$= \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{-2(4+2i)}{-2(2-i)}$$

$$= \frac{(4+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+2i+8i-4}{4+1}$$

$$= \frac{10i}{5} = 2i$$

وهذا هو المطلوب .

ج- لنستنتج أن : المثلث ABC قائم الزاوية وأن $BC = 2AC$

$$\frac{b-c}{a} = 2i = \left[2, \frac{\pi}{2}\right]$$

لدينا :

$$\left| \frac{b-c}{a} \right| = 2$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{b-c}{a}\right) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

حل المسألة :

I-1-أ- لنحسب $g'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$

لدينا : $g(x) = x - 2\ln x$

ومنه لكل x من $]0, +\infty[$: $g'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

ب- لنبين أن g تناقصية على المجال $]0, 2]$ وتزايدية على المجال $[2, +\infty[$

لدينا لكل x من $]0, +\infty[$: $g'(x) = \frac{x-2}{x}$

وبما أن $x > 0$ فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(x-2)$

إشارة $(x-2)$ تلخص في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x-2$			0	$+$

ومنه إذا كان $x \in]0, 2]$ فإن $(x-2) \leq 0$

أي $g'(x) \leq 0$

إذن g تناقصية على المجال $]0, 2]$

وإذا كان $x \in [2, +\infty[$ فإن $(x-2) \geq 0$

أي $g'(x) \geq 0$

إذن g تزايدية على المجال $[2, +\infty[$

2- لنستنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$

لدينا جدول تغيرات g هو :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0
$g(x)$		$2-2\ln 2$	

$\ln 2 < 1$ لأن $g(2) = 2 - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0$

بما أن g تقبل قيمة دنيا هي $2-2\ln 2$ على $]0, +\infty[$

فإن $g(x) \geq 2 - 2\ln 2$ لكل x من $]0, +\infty[$

أي أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

II-1-أ- لنحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$:

لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - (\ln x)^2 = -\infty$

{ لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ }

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{b-c}{a-c} \right| = 2 \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |b-c| = 2|a-c| \\ (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad (2)$$

(1) ABC قائم الزاوية في C .

(2) $BC=2AC$ تعني أن

التمرين رقم 3 :

ليكن Ω كون الإمكانات :

بما أن السحب في آن واحد ثلاث كرات فإن :

$$Card\Omega = C_9^3 = 84$$

1-أ- لنحسب احتمال الحدث :

A : « الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء »

لدينا $A = \{RRV\}$ ومنه $CardA = C_6^2 \cdot C_3^1 = 45$

$$P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28}$$

ب- ليكن B حدث الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل

- لنبين أن $P(B) = \frac{16}{21}$

نعتبر الحدث المضاد $\bar{B}$: « عدم الحصول على أية كرة خضراء » :

$$\bar{B} = \{RRR\}$$

لدينا $Card\bar{B} = C_6^3 = 20$

$$P(\bar{B}) = \frac{Card\bar{B}}{Card\Omega} = \frac{20}{84} = \frac{5}{21}$$

وبما أن $P(B) = 1 - P(\bar{B})$

$$P(B) = 1 - \frac{5}{21} = \frac{16}{21}$$

2- ليكن Ω' كون الإمكانات في هذه التجربة :

بما أن السحب بالتتابع وبدون إحلال ثلاث كرات فإن :

$$Card\Omega' = A_9^3 = 504$$

ليكن C حدث الحصول على ثلاث كرات حمراء

لدينا : $CardC = A_6^3 = 120$

$$P(C) = \frac{CardC}{Card\Omega'} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$$

و هذا يعني أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ)

3- لنبين أن $\forall x]0, +\infty[: f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

لدينا لكل x من $]0, +\infty[: f(x) = x - (\ln x)^2$

ومنه $f(x) = 1 - 2(\ln x)' \ln x = 1 - \frac{2}{x} \ln x$

$$= \frac{x - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

* استنتاج تغيرات f :

بما أن $x > 0$ فإن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$

لكل x من $]0, +\infty[$

ونعلم أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

إذن $f'(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

وهذا يعني أن f تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
$f(x)$		$+\infty$

ج- لنبين أن (Δ) مماس للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها I .

نعلم أن معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة التي أفصولها I

هي : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

وبما أن $f(1) = 1$ و $f'(1) = g(1) = 1$

فإن معادلة المماس هي : $y = x - 1 + 1 = x$

وهذا هو المطلوب .

4- لنبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في $]0, +\infty[$

لدينا f متصلة (كمجموع دالتين متصلتين) و تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$ ولدينا $f[0, +\infty[= \mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$

إذن يوجد عنصر وحيد α من $]0, +\infty[$ بحيث : $f(\alpha) = 0$

* لنبين أن $\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$

بما أن $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$

و $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - (\ln(2))^2 > 0$ أي $f\left(\frac{1}{e}\right)f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

فإن حسب مبرهنة القيم الوسيطة نستنتج أن :

$$\alpha \in \left] \frac{1}{e}, \frac{1}{2} \right[$$

* التأويل الهندسي :

المنحنى (C) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x=0$

2- لنبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$

لدينا لكل x من $]0, +\infty[$:

$$\frac{(\ln x)^2}{x} = \frac{(2 \ln \sqrt{x})^2}{(\sqrt{x})^2} = 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$$

بوضع $t = \sqrt{x}$ نجد $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

ب- استنتاج :

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln x)^2$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty$$

{ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 - \frac{(\ln x)^2}{x} = 1$ }

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)}{x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \frac{(\ln x)^2}{x} = 1$$

ج- لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(\ln x)^2 = -\infty$

* التأويل الهندسي :

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty$

فإن المنحنى (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه المستقيم (Δ)

الذي معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

د- لنبين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) :

لدينا لكل x من $]0, +\infty[$:

$$f(x) - y = f(x) - x$$

$$= x - (\ln x)^2 - x$$

$$= -(\ln x)^2 \leq 0$$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[, f(x) < x$

إذن

$$A = \int_1^e (x - f(x)) dx \quad (u.a) = \int_1^e (\ln x)^2 dx \quad (u.a)$$

$$= (e - 2) \quad (u.a)$$

III-1- لنبين أن $1 \leq u_n \leq 2$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=2$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$

نفترض أن $1 \leq u_n \leq 2$ ولنبين أن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

بما أن f تزايدية على $]0, +\infty[$

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

أي $1 \leq u_{n+1} \leq 2 - (\ln 2)^2$

وبما أن $2 - (\ln 2)^2 < 2$ فإن $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

2- لنبين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية

نعلم أن $\forall n \in]0, +\infty[; f(x) < x$

و $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [1, 2]$

إذن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f(u_n) < u_n$

أي $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} < u_n$

إذن $(u_n)_n$ تناقصية .

3- * استنتاج :

$(u_n)_n$ تناقصية ومصفورة بالعدد 1 إذن فهي متقاربة

* نهاية $(u_n)_n$:

بما أن $u_0 \in [1, 2]$ و $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

و f متصلة على $[1, 2]$ و $f([1, 2]) \subset [1, 2]$

و $(u_n)_n$ متقاربة فإن نهاية $(u_n)_n$ هي العدد l ، بحيث l حل

للمعادلة $x \in [1, 2] ; f(x) = x$

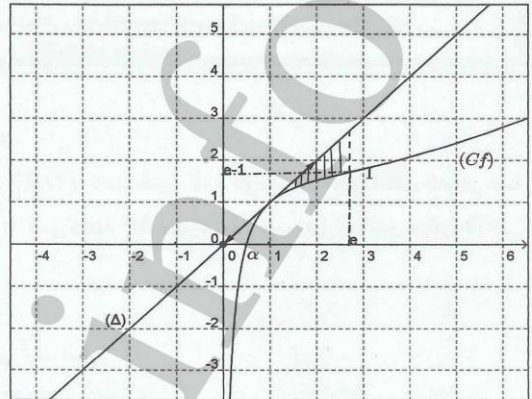
$$f(x) = x \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 0$$

$$x \in [1, 2] \quad x \in [1, 2]$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

5- إنشاء المنحنى (C) :



6- أ- * لنبين أن $H: x \mapsto x \ln x - x$ دالة أصلية للدالة

$\ln: x \mapsto \ln x$ على المجال $]0, +\infty[$

لدينا H دالة قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ولكل x من

$]0, +\infty[$:

$$H'(x) = (x \ln x - x)' = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

وهذا هو المطلوب .

* لنبين أن $\int_1^e \ln x dx = 1$

$$\int_1^e \ln x dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1)$$

$$= e - e - (0 - 1) = 1$$

ب- لنبين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx$$

$$= e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2$$

ج- لنحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) و

المستقيم (Δ) والمستقيمين الذين معادلتاهما $x=e$ و $x=1$

لتكن A المساحة المطلوبة :

$$A = \int_1^e |f(x) - x| dx \quad (u.a)$$

ولدينا $\forall x \in]0, +\infty[; f(x) < x$

فإن $\forall x \in]0, +\infty[; f(x) - x < 0$

$$|f(x) - x| = x - f(x)$$