

و بما أن :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

إذن :

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$$

وهذا يعني أن x حل للمعادلة (S).

(4) لنستنتج مجموعة حلول (S).

لتكن E مجموعة حلول (S)

لدينا حسب السؤالين (2) و (3)

$$x \in E \Leftrightarrow \frac{pq}{(x - x_0)} \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x - x_0 = kpq$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = x_0 + kpq$$

إذن :

$$E = \{x_0 + kpq / k \in \mathbb{Z}\}$$

(5) لنحل في $\mathbb{Z}$ النظام :

$$\begin{cases} X \equiv 1[8] \\ X \equiv 3[13] \end{cases}$$

لدينا حسب السؤال (4) مجموعة حلول النظام هي :

$$E = \{x_0 + 104k / k \in \mathbb{Z}\}$$

حيث :

$$x_0 = 24u_0 + 13v_0$$

و :

$$8u_0 + 13v_0 = 1$$

لنحدد زوج (u_0, v_0) بحيث :

$$8u_0 + 13v_0 = 1$$

لدينا : $8(-8) + 13(5) = 1$

ومنه : $(u_0, v_0) = (-8; 5)$ حل للمعادلة $8u_0 + 13v_0 = 1$

إذن :

$$x_0 = 24(-8) + 13 \cdot 5$$

أي :

$$x_0 = -127$$

وبالتالي :

$$E = \{-127 + 104k / k \in \mathbb{Z}\}$$

حل التمرين الثاني :

ليكن Ω كون الإمكانات .

بما أن السحب بالتتابع وبدون إحلال فإن كل نتيجة هي ترتيبية بدون تكرار لعنصرين من بين n .

ومنه : $\text{card} \Omega = A^2 n$

(1) احتمال الحدث A :

يتحقق A بالحصول على :

إما كرتين تحملان الرقم 1

إما كرتين تحملان الرقم 2

Achamel.info

حل التمرين الأول :

(1) $p \wedge q = 1$: بما أن :

فإنه حسب مبرهنة بوزو يوجد زوج (u_0, v_0) من $\mathbb{Z}^2$

بحيث : $pu_0 + qv_0 = 1$

ب- لنبين أن x_0 حل للنظمة (S)

لدينا : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

ومنه :

$$x_0 - a = bpu_0 + a(qv_0 - 1)$$

وبما أن :

$$qv_0 - 1 = -pu_0$$

فإن :

$$x_0 - a = (b - a)u_0 p$$

إذن :

$$x_0 - a \equiv 0[p]$$

يعني :

$$x_0 \equiv a[p]$$

ثم :

$$x_0 - b = b(pu_0 - 1) + aqv_0$$

$$= b(-qv_0) + aqv_0$$

$$= (a - b)v_0 q$$

إذن :

$$x_0 - b \equiv 0[q]$$

يعني :

$$x_0 \equiv b[q]$$

وبالتالي :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

إذن x_0 حل للنظمة (S).

(2) ليكن x حلا للنظمة (S)

إذن :

$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$$

ونعلم أن :

$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

ومنه :

$$\begin{cases} x - x_0 \equiv 0[p] \\ x - x_0 \equiv 0[q] \end{cases}$$

أي : $\frac{p}{(x - x_0)}$ و $\frac{q}{(x - x_0)}$ و $p \wedge q = 1$

إذن :

$$\frac{pq}{(x - x_0)}$$

(3) ليكن x من $\mathbb{Z}$ بحيث pq يقسم العدد $x - x_0$ ، إذن :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; x - x_0 = kpq$$

وبما أن :

$$\begin{cases} kpq \equiv 0[p] \\ kpq \equiv 0[q] \end{cases}$$

فإن :

$$\begin{cases} x \equiv x_0[p] \\ x \equiv x_0[q] \end{cases}$$

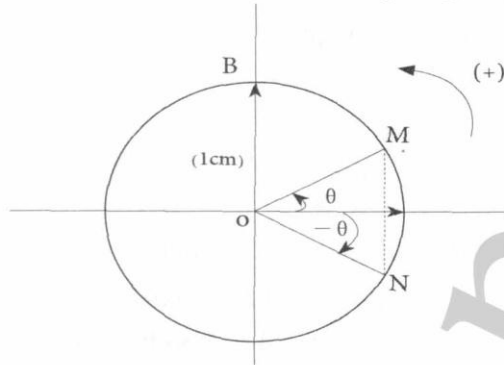
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Z(1 + i\bar{Z} - \bar{Z}^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 1 + i\bar{Z} - \bar{Z}^2 &= 0 \quad (Z \neq 0) \\ \Leftrightarrow \bar{Z}^2 - i\bar{Z} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow Z^2 + iZ - 1 &= 0 \\ \Delta &= -1 + 4 = 3 \\ Z &= \frac{-i + \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{أو:} \\ Z &= \frac{-i - \sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \\ S &= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right\} \quad \text{إذن:} \end{aligned}$$

$$Z = \cos\theta + i\sin\theta \quad (3) \text{ نضع:}$$

$$Z = \cos\theta - i\sin\theta \quad \text{ومنه:}$$

أ- النقط B و M و N.

تتبع إلى الدائرة المثلثية.



ب- لتكن $p(\bar{Z} + i)$

- لتبين أن الرباعي ONPB معين.

$$Z_{OB} = Z_B - Z_O = i \quad \text{لدينا أولا:}$$

$$Z_{NP} = Z_P - Z_N = \bar{Z} + i - \bar{Z} = i$$

$$Z_{OB} = Z_{NP} \quad \text{إذن:}$$

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{NP} \quad \text{ومنه:}$$

وهذا يعني أن ONPB متوازي أضلاع.

$$OB = |Z_B - Z_O| = |i| = 1 \quad \text{ثانيا:}$$

$$BP = |Z_P - Z_B| = |\bar{Z} + i - i| = |\bar{Z}| = 1$$

$$OB = BP \quad \text{ومنه:}$$

وبالتالي ONPB معين إذن المستقيم (OP) هو المنصف الداخلي

للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OB})$

$$(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OB}))[2\pi] \quad \text{ومنه:}$$

$$\arg(Z_P) - \arg(Z_N) = \frac{1}{2}(\arg(Z_B) - \arg(Z_N))[2\pi] \quad \text{أي}$$

إما كرتين تحملان الرقم 3

$$CardA = 3.A_{\frac{2}{3}} \quad \text{ومنه:}$$

$$p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} \quad \text{إذن:}$$

(لأن الكرات لا يمكن تمييزها باللمس ومنه فرضية تساوي الاحتمال)

$$\begin{aligned} p(A) &= \frac{3 \cdot \frac{n}{3} \left(\frac{n}{3} - 1 \right)}{n(n-1)} \\ &= \frac{n-3}{3(n-1)} \end{aligned} \quad \text{يعني:}$$

(2) احتمال الحدث B:

يتحقق الحدث B بالحصول على:

إما كرتين 1 و 2

و إما كرتين 2 و 3

(مع اعتبار الترتيب)

$$CardB = 2A_{\frac{1}{3}}.A_{\frac{1}{3}} + 2A_{\frac{1}{3}}.A_{\frac{1}{3}} \quad \text{ومنه:}$$

$$= 4\left(\frac{n}{3}\right)^2$$

$$p(B) = \frac{CardB}{Card\Omega} \quad \text{ومنه:}$$

$$p(B) = \frac{4\left(\frac{n}{3}\right)^2}{n(n-1)} = \frac{4n}{9(n-1)}$$

حل التمرين الثالث:

(1) لتكن (D) مجموعة النقط $M(Z)$ بحيث: $|f(Z)| = 1$

$$M(Z) \in (D) \Leftrightarrow |f(Z)| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{\bar{Z} + i}{Z} \right| = 1; (Z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow |\bar{Z} + i| = |Z|; (Z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow |\bar{Z} - i| = |Z|; (Z \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow |Z - i| = |Z|$$

نعتبر النقطة B التي لحقها i

$$M(Z) \in (D) \Leftrightarrow BM = OM \quad \text{ومنه:}$$

ومنه (D) هو واسط القطعة [OB] معادلة ديكارتية لـ (D) هي $y = \frac{1}{2}$

$$(2) \text{ لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } f\left(\frac{1}{Z}\right) = Z\bar{Z}$$

$$f\left(\frac{1}{Z}\right) = Z\bar{Z} \Leftrightarrow \frac{\left(\frac{1}{Z}\right) + i}{\frac{1}{Z}} = Z\bar{Z}$$

$$\Leftrightarrow Z\left(\frac{1}{Z} + i\right) = Z\bar{Z}$$

$$\Leftrightarrow Z(1 + i\bar{Z}) = Z\bar{Z}^2$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') & -(\alpha b + \beta b') \\ 5(\alpha b + \beta b') & (\alpha a + \beta a') - 3(\alpha b + \beta b') \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a + \beta a', \alpha b + \beta b') \in F$$

ومنه $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي

$$(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$$

ب- لنبين أن بين (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(F, +, \cdot)$

لدينا: لكل M من F يوجد (a, b) من $\mathbb{R}^2$ بحيث: $M = M(a, b)$

$$M = M(a, b) = \begin{pmatrix} a + b & -a \\ 5b & a - 3b \end{pmatrix} \quad \text{ومنه:}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= aM(1, 0) + bM(0, 1)$$

$$= aI + bJ$$

إذن (I, J) أسرة مولدة للفضاء $(F, +, \cdot)$

ليكن x و y من $\mathbb{R}$

$$xI + yJ = 0 \quad \text{بحيث:}$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x + y & -y \\ 5y & x - 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 5y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -y = 0 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

إذن: (I, J) أسرة حرة

ومنه (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(F, +, \cdot)$

$$\dim F = 2 \quad \text{ولدينا:}$$

(2) لنبين أن $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي $(C, +, \cdot)$

لدينا: $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ومنه:

$$\exists! (a, b) \in \mathbb{R}^{*2}; \alpha = a + ib$$

$$ib = \alpha - a$$

$$i = \frac{\alpha - a}{b}$$

ليكن $Z \in \mathbb{C}$ ، نعلم أن:

$$\exists! (x, y) \in \mathbb{R}^2; Z = x + iy$$

$$\arg(Z_p) \equiv \frac{1}{2} \arg(Z_p) + \frac{1}{2} \arg(Z_N)[2\pi]$$

$$\arg(\bar{Z} + i) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) [2\pi] \quad \text{وبالتالي:}$$

$$\arg(\bar{Z} + i) \equiv \frac{\pi - 2\theta}{4} [2\pi]$$

لنحدد عمدة لـ $f(Z)$ بدلالة θ .

$$f(Z) = \frac{\bar{Z} + i}{Z} \quad \text{لدينا:}$$

$$\arg(f(Z)) \equiv \arg\left(\frac{\bar{Z} + i}{Z}\right) [2\pi] \quad \text{ومنه:}$$

$$\equiv (\arg(\bar{Z} + i) - \arg(Z)) [2\pi]$$

$$\equiv \left(\frac{\pi - 2\theta}{4} - \theta \right) [2\pi]$$

$$\arg(f(Z)) \equiv \left(\frac{\pi - 6\theta}{4} \right) [2\pi] \quad \text{إذن:}$$

ج- لنحدد بدلالة O معيار $f(Z)$

لدينا:

$$f(Z) = \frac{\bar{Z} + i}{Z}$$

$$Z = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$|f(Z)| = \left| \frac{\bar{Z} + i}{Z} \right|$$

$$= \frac{|\bar{Z} + i|}{|Z|} = |\cos\theta - i\sin\theta + i|$$

$$(|Z| = 1 \quad \text{لأن})$$

$$|f(Z)| = |\cos\theta + i(1 - \sin\theta)| \quad \text{ومنه:}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + (1 - \sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + 1 - 2\sin\theta + \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{2 - 2\sin\theta}$$

$$|f(Z)| = \sqrt{2(1 - \sin\theta)}$$

حل التمرين الرابع:

(1) أ- لنبين أن $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

لأجل ذلك يكفي أن نبين أن $(F, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي

للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

$$M(o, o) = 0 \quad \text{* لدينا:}$$

$$M(o, o) \in F \quad \text{إذن:}$$

$$F \neq \emptyset \quad \text{ومنه:}$$

* ليكن $M_1(a, b)$ و $M_2(a', b')$ عنصرين من F و $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha M_1(a, b) + \beta M_2(a', b') \quad \text{لدينا:}$$

$$= \alpha \begin{pmatrix} a + b & -b \\ 5b & a - 3b \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} a' + b' & -b' \\ 5b' & a' - 3b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + \alpha b & -\alpha b \\ 5\alpha b & \alpha a - 3\alpha b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a' + \beta b' & -\beta b' \\ 5\beta b' & \beta a' - 3\beta b' \end{pmatrix}$$

$$\Psi(\alpha^2) = (\Psi(\alpha))^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) = j^2$$

$$\Leftrightarrow xI + yJ = -2(I + J)$$

$$\Leftrightarrow xI + yJ = -2I - 2J$$

وبما أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(F, +, \cdot)$ فإن :

$$\Psi(\alpha^2) = (\Psi(\alpha))^2 \Leftrightarrow x = -2 \text{ و } y = -2$$

$$\alpha^2 = -2 - 2\alpha \quad \text{ومنه :}$$

$$\alpha^2 + 2\alpha + 2 = 0 \quad \text{يعني :}$$

إذن α حل للمعادلة :

$$Z^2 + 2Z + 2 = 0 ; Z \in C$$

$$\Delta = -4 = (2i)^2 \quad \text{لدينا :}$$

$$Z = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$Z = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

ومنه : $\alpha = -1 - i$ أو $\alpha = -1 + i$

(4) نأخذ $\alpha = -1 + i$

لنكتب j^{2007} في الأساس (I, J)

نعلم أن : $\Psi(\alpha) = J$

(وذلك حسب السؤال 3 أ)

$$j^{2007} = (\Psi(\alpha))^{2007}$$

وبما أن Ψ تشاكل تقابلي لأجل $\alpha = -1 + i$ فإن :

$$(\Psi(\alpha))^{2007} = \Psi(\alpha^{2007})$$

$$j^{2007} = \Psi(\alpha^{2007})$$

$$\alpha = -1 + i \quad \text{لدينا :}$$

$$= \left[\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$\alpha^{2007} = \left[\sqrt{2}^{2007}, 2007 \cdot \frac{3\pi}{4} \right]$$

$$\alpha^{2007} = \sqrt{2}^{2006} \left[\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4} \right] \quad \text{ومنه :}$$

$$= 2^{1003} (-1 - i)$$

وبما أن : $\alpha = -1 + i$ فإن $i = 1 + \alpha$

$$\alpha^{2007} = 2^{1003} (-2 - \alpha) \quad \text{إذن :}$$

$$= -2^{1004} - 2^{1003} \alpha$$

$$j^{2007} = \Psi(-2^{1004} - 2^{1003} \alpha) \quad \text{ومنه :}$$

$$= M(-2^{1004}, -2^{1003} \alpha)$$

$$= -2^{1004} I - 2^{1003} J$$

$$j^{2007} = -2^{1004} I - 2^{1003} J \quad \text{إذن :}$$

$$Z = x + \left(\frac{\alpha - a}{b} \right) y \quad \text{ومنه :}$$

$$Z = x + \frac{\alpha y - ay}{b}$$

$$Z = \frac{xb - ay}{b} + \alpha \frac{y}{b} \quad \text{ومنه :}$$

$$Y = \frac{y}{b} \quad X = \frac{xb - ay}{b} \quad \text{نضع :}$$

$$(\forall Z \in C) ; \exists ! (X, Y) \in IR^2 / Z = X + Y\alpha$$

$$\left(Y = \frac{y}{b} \text{ و } X = \frac{xb - ay}{b} \right) \quad \text{حيث :}$$

إذن : $(1, \alpha)$ أساس للفضاء المتجهي $(C, +, \cdot)$

$$\Psi: C \longrightarrow F \quad (3)$$

$$Z \mapsto \Psi(Z) = M(a, b)$$

حيث : $((a, b) \in IR^2) \quad Z = a + \alpha b$

أ- لنتحقق من أن : $j^2 = -2(I + J)$

لدينا :

$$j^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-5 & -1+3 \\ 5-15 & -3+9 \end{pmatrix}$$

$$j^2 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & -3 \end{pmatrix} \right]$$

$$= -2(I + J)$$

$$\Psi(\alpha) = J \quad *$$

$$\Psi(\alpha) = J \quad \text{لنبين :}$$

$$\Psi(\alpha) = \Psi(0 + \alpha \cdot 1) = M(0, 1) = J$$

ب- لنحدد قيمتي α اللتان من أجلهما يكون Ψ تشاكل تقابلي من

$(C, \times)$ نحو $(F, *)$

نفترض أن Ψ تشاكل من $(C, \times)$ نحو $(F, *)$

إذن :

$$\forall (Z, Z') \in C^2 ; \Psi(Z \times Z') = M(a, b) \times M(a', b')$$

$$= \Psi(Z) \times \Psi(Z')$$

$$\left(\begin{matrix} Z = a + \alpha b \\ Z' = a' + \alpha b' \end{matrix} \text{ حيث :} \right)$$

$$Z = Z' = \alpha$$

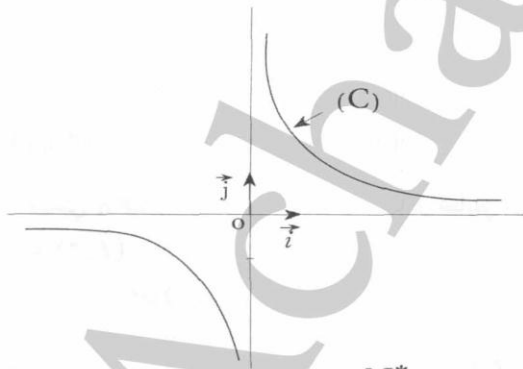
$$\Psi(\alpha^2) = (\Psi(\alpha))^2 \quad \text{ومنه :}$$

$$((x, y) \in IR^2) ; \alpha^2 = x + \alpha y \quad \text{نضع :}$$

ب- حساب $f'(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$
 لدينا g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ و $g(x) \neq 0$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$
 ومنه الدالة $\frac{1}{g}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$
 إذن f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$
 لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)} \right)$
 $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$
 ج- جدول تغيرات f :
 لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2}$
 وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; g'(x) > 0$
 فإن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) < 0$
 يعني : f تناقصية قطعاً على كل من المجالين $]0, +\infty[$ و $]-\infty, 0[$
 وجدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	-
$f(x)$	$0 \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 0$	

د- إنشاء (C) .
 (C) يقبل مقارباً أفقياً معادلته $y=0$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$
 و يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x=0$ بجوار $-\infty$ و $+\infty$



(3) أ- ليكن n من $\mathbb{N}^*$
 لنبين أن المعادلة $f(x) = n$ تقبل حلاً وحيداً x_n من المجال $]0, +\infty[$
 نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $]0, +\infty[$ كما يلي :
 $h(x) = f(x) - n$
 لدينا : $(\forall x \in]0, +\infty[) ; h'(x) = f'(x)$
 ومنه h تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$
 و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -n$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = +\infty$

حل التمرين الخامس:

(1) أ- تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$
 g دالة معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع دوال معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا :
 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = 1 + e^{-x}$
 $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-x} > 0$
 فإن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) > 0$
 وهذا يعني أن g تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$
 ب- لدينا :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x + e^{-x}) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + e^{-x}) = +\infty$
 (لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ حيث : $X = -x$)
 (لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ حيث : $X = -x$)
 جدول تغيرات g هو :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	$-\infty \rightarrow 0$	$0 \rightarrow +\infty$

ج- لدينا g دالة متصلة و تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ و $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
 إذن g تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$ ، إذن له سابق وحيد x_0 في $\mathbb{R}$.
 وبما أن $g(0) = 0$
 فإن $x_0 = 0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ في $\mathbb{R}$

(2) أ- حساب النهايات :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$ *
 (لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{g(x)} = 0$ *
 (لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$)
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{g(x)}$ *
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{g(x)}$ *
 $(\forall x > 0) ; g(x) > 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{g(x)}$ *
 $(\forall x < 0) ; g(x) < 0$
 $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
 وبما أن :
 فإن :

يعني d تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$ و
ومنه تناقصية قطعاً على $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

و: $d\left(\frac{1}{e}\right) = e^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{+\frac{1}{e}}} - \frac{1}{e}$
 $= \frac{e - e^{-\frac{1}{e}}}{ee^{+\frac{1}{e}}} > 0$ (لأن $e > e^{-\frac{1}{e}}$)

و: $d(1) = e^{-1} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $d(x) = 0$ تقبل حلاً
 وحيداً X_1 في المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

ومنه المعادلة $e^{-x} = x$ تقبل حلاً وحيداً X_1 بحيث: $\frac{1}{e} < x_1 < 1$

(2) لدينا: $y_1 = 1$
 $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_{n+1} = e^{-y_n}$

أ- لنبين بالترجع أنه: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$
 من أجل $n=1$ لدينا: $y_1 = 1$
 ومنه $\frac{1}{e} \leq y_1 \leq 1$
 نفترض أن: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$
 ولنبين أن: $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$
 بما أن $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$ (حسب الافتراض)
 فإن: $-1 \leq -y_n \leq -\frac{1}{e}$
 ومنه $e^{-1} \leq e^{-y_n} \leq e^{-\frac{1}{e}}$
 يعني: $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}}$
 وبما أن: $\frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} < \frac{1}{e^0} = 1$
 فإن: $\frac{1}{e} \leq y_{n+1} \leq 1$
 وبالتالي: $\frac{1}{e} \leq y_n \leq 1$; $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

ب- البرهان على متفاوتة المطلوبة.
 نعتبر الدالة العددية U بحيث: $U(x) = e^{-x}$
 لدينا: U قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$

و: $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] ; U'(x) = -e^{-x}$
 ومنه: $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] ; -e^{-\frac{1}{e}} \leq U'(x) \leq -e^{-1}$
 إذن: $\forall x \in \left[\frac{1}{e}, 1\right] ; |U'(x)| \leq e^{-\frac{1}{e}}$

لدينا: $\alpha \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$ و $y_n \in \left[\frac{1}{e}, 1\right]$
 إذن حسب متفاوتة التزايد المتناهية على المجال الذي طرفاه α و y_n

إذن h تقابل من $]0, +\infty[$ نحو $] -n, +\infty[$
 و $] -n, +\infty[\ni 0$ أي يقبل سابقاً وحيداً X_n من المجال $]0, +\infty[$
 ومنه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً X_n في المجال $]0, +\infty[$

خلاصة:
 المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً X_n في المجال $]0, +\infty[$

ب- لنبين أن $(x_n)_n$ تناقصية.

لدينا: $f(x_{n+1}) = n+1$ و $f(x_n) = n$
 و: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n < n+1$
 إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) < f(x_{n+1})$
 ولدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n \in]0, +\infty[$

و f تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$
 إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n > x_{n+1}$

ومنه المتتالية $(x_n)_n$ تناقصية
 وبما أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n > 0$
 فإن المتتالية $(x_n)_n$ مصغورة بالعدد 0، إذن فهي متقاربة.

ج- لنبين أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$
 لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) = n$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{1+x_n - e^{-x_n}} = n$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1+x_n - e^{-x_n} = \frac{1}{n}$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n = \frac{1}{n} + e^{-x_n} - 1$
 وبما أن:

$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; x_n > 0$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; -x_n < 0$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; e^{-x_n} - 1 < 0$
 $\Leftrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 < x_n < \frac{1}{n}$

وبما أن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$
 فإن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$

(II) أ-
 $f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+x - e^{-x}} = 1, (x \neq 0)$
 $\Leftrightarrow 1+x - e^{-x} = 1, (x \neq 0)$
 $\Leftrightarrow e^{-x} = x, (x \neq 0)$

ب- نعتبر الدالة العددية d المعرفة كما يلي: $d(x) = e^{-x} - x$
 لدينا d متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$
 و $(\forall x \in \mathbb{R}) ; d'(x) = -e^{-x} - 1 < 0$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1/x + 2x}{1/x + 1}\right) = \ln 2$ فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \ln(2)$ (2) - لنبين أن : $(\forall t > 0) \quad 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ نعتبر الدالتين العدديتين V و W بحيث : $v(t) = e^{-t} + t - 1$ $w(t) = e^{-t} + t - 1 - \frac{t^2}{2}$ $(\forall t \geq 0) ; v'(t) = e^{-t} + 1$ $(\forall t \geq 0) ; v'(t) \geq 0$ إذن : V تزايدية على $\mathbb{R}^+$ ومنه : $(\forall t \geq 0) ; v(t) \geq v(0) = 0$ يعني : $(\forall t \geq 0) ; e^{-t} \geq 1 - t$ ولدينا : $(\forall t \geq 0) ; w'(t) = -e^{-t} + 1 - t = -v(t) \leq 0$ إذن : W تناقصية على $\mathbb{R}^+$ ومنه : $(\forall t \geq 0) ; w(t) \geq w(0) = 0$ يعني : $(\forall t \geq 0) ; e^{-t} + t - 1 - \frac{t^2}{2} \leq 0$ أي : $(\forall t \geq 0) ; e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ وبالتالي : $(\forall t \geq 0) ; 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ ب- لدينا : $(\forall t \geq 0) ; 1 - t \leq e^{-t} \leq 1 - t + \frac{t^2}{2}$ ومنه : $(\forall t \geq 0) ; -1 + t - \frac{t^2}{2} \leq -e^{-t} \leq -1 + t$ $-1 + t + 1 + t - \frac{t^2}{2} \leq 1 + t - e^{-t} \leq -1 + t + 1 + t$ $2t - \frac{t^2}{2} \leq 1 + t - e^{-t} \leq 2t$ $(\forall t \geq 0) ; \frac{4t - t^2}{2} \leq 1 + t - e^{-t} \leq 2t$ ومنه : $(\forall t \in]0; 4[) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{2}{4t - t^2}$ (لاحظ أن : $(\forall t \in]0; 4[) ; 4t - t^2 > 0$) وبما أن : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{4-t}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4-t+t}{t(4-t)}\right)$ $= \frac{2}{4t - t^2}$ فإن : $(\forall t \in]0; 4[) ; \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$ ج- لنستنتج أن F متصلة في 0 : لدينا : $F(0) = \frac{1}{2} \ln(2)$	نجد : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; U(y_n) - U(\alpha) \leq e^{-\frac{1}{e}} y_n - \alpha$ أي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_{n+1} - \alpha \leq e^{-\frac{1}{e}} y_n - \alpha$ ج- استنتاج : - لنبين بالترجع أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_n - \alpha \leq e^{-\left(\frac{n-1}{e}\right)} 1 - \alpha$ من أجل $n=1$ لدينا : $y_1 - \alpha = 1 - \alpha$ و : $e^{-\left(\frac{1-1}{e}\right)} 1 - \alpha = 1 - \alpha$ إذن : $y_1 - \alpha \leq e^{-\left(\frac{1-1}{e}\right)} 1 - \alpha$ نفترض أن : ولنبين أن : $y_{n+1} - \alpha \leq e^{-\frac{n}{e}} 1 - \alpha$ لدينا : $y_{n+1} - \alpha \leq e^{-\frac{1}{e}} y_n - \alpha$ و : $y_n - \alpha \leq e^{-\left(\frac{n-1}{e}\right)} 1 - \alpha$ إذن : $y_{n+1} - \alpha \leq e^{-\frac{1}{e}} \cdot e^{-\left(\frac{n-1}{e}\right)} 1 - \alpha$ أي : $y_{n+1} - \alpha \leq e^{-\frac{n}{e}} 1 - \alpha$ وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; y_n - \alpha \leq e^{-\left(\frac{n-1}{e}\right)} 1 - \alpha$ وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\left(\frac{n-1}{e}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{e}} \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0$ (لأن : $e^{\frac{1}{e}} > 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{e} < 1$) فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y_n = \alpha$ ومنه $(y_n)_n$ متقاربة ونهايتها هي : α. (III) 1) - لنبين أن : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ لدينا : $(\forall t > 0) ; -t < 0$ و : $e^{-t} < 1$ إذن : $(\forall t > 0) ; 1 - e^{-t} > 0$ ومنه : $(\forall t > 0) ; t \leq 1 + t - e^{-t} \leq 1 + t$ أي : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{1+t} \leq \frac{1}{1+t - e^{-t}} \leq \frac{1}{t}$ إذن : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ ب- استنتاج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ لدينا : $(\forall t > 0) ; \frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$ ومنه : $(\forall t > 0) ; \int_x^{2x} \frac{1}{1+t} dt \leq F(x) \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$ $(\forall t > 0) ; \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) \leq F(x) \leq \ln 2$
---	---

9 :

$$(\forall t \in]0; 4[); \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right)$$

$$(\forall t \in]0; 4[); \int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t} \right) dt$$

$$(\forall t \in]0; 4[); \frac{1}{2} [\ln |t|]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \left[\ln \left| \frac{t}{4-t} \right| \right]_x^{2x}$$

$$(\forall t \in]0; 4[); \frac{1}{2} \ln(2) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} \ln \left| \frac{2(4-x)}{4-2x} \right|$$

وبما أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| \frac{2(4-x)}{4-2x} \right| = \ln(2)$$

هنا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{1}{2} \ln(2) = F(0)$$

ومنه F متصلة في 0.

(3) أ- الدالة f متصلة على IR_+^*

ومنه تقبل دالة أصلية φ على IR_+^*

إذن : $(\forall x \in IR_+^*) ; F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

نعتبر الدالة l بحيث : $l(x) = 2x$

لدينا : $F = \varphi \circ l - \varphi$

l دالة قابلة للاشتقاق على IR_+^* $l'(x) = 2$

φ قابلة للاشتقاق على IR_+^*

إذن : f قابلة للاشتقاق على IR_+^*

ولدينا :

$$(\forall x \in IR_+^*) ; F'(x) = l'(x) \cdot \varphi'(l(x)) - \varphi'(x)$$

$$(\forall x \in IR_+^*) ; F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

ب- تغيرات F على IR_+^*

لدينا :

$$(\forall x \in IR_+^*) ; F'(x) = 2f(2x) - f(x)$$

$$F'(x) = 2 \frac{1}{1+2x-e^{-2x}} - \frac{1}{1+x-e^{-x}}$$

$$= \frac{2(1+x-e^{-x}) - (1+2x-e^{-2x})}{g(2x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{1-2e^{-x}+e^{-2x}}{g(2x) \cdot g(x)}$$

$$(\forall x \in IR_+^*) ; F'(x) = \frac{(1-e^{-x})^2}{g(2x) \cdot g(x)}$$

وبما أن :

$$(\forall x \in IR_+^*) ; g(2x) > 0 \text{ و } g(x) > 0$$

$$(1-e^{-x})^2 > 0$$

و :

هنا :

$$(\forall x \in IR_+^*) ; F'(x) > 0$$

إذن F تزايدية قطعاً على IR_+^*