

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2012

حل التمرين الأول:

(1) لكل x من $\mathbb{R} - \{-2\}$ لدينا:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 7 - \frac{10}{x+2} &= \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 7) - 10}{x+2} \\
 &= \frac{x^3 - 2x^2 + 7x + 2x^2 - 4x + 14 - 10}{x+2} \\
 &= \frac{x^3 + 3x + 4}{x+2}
 \end{aligned}$$

و منه المطلوب :
(2) استنتاج :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{x^3 + 3x + 4}{x+2} dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 7 - \frac{10}{x+2} \right) dx \\
 &= \int_0^1 \left(x^2 - 2x + 7 - 10 \frac{(x+2)'}{x+2} \right) dx \\
 &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 7x - 10 \ln(x+2) \right]_0^1 \\
 &= \left(\frac{1}{3} - 1 + 7 - 10 \ln(3) \right) + 10 \ln(2) \\
 &= \frac{19}{3} + 10 \ln\left(\frac{2}{3}\right)
 \end{aligned}$$

حل التمرين الثاني:

(1) حساب u_1 و u_2 :لدينا : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4}$ إذن : $u_1 = \frac{1}{4}u_0 + \frac{3}{4}$ و

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \frac{1}{4}u_1 + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{15}{16}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{3}{4}$$

تتمة حل التمرين رقم 2 :

(2) أ- لنبين بالترجع أن : $0 \leq u_n < 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ من أجل $n=0$ لدينا : $u_0 = 0$ و منه : $0 \leq u_0 < 1$ نفترض أن : $0 \leq u_n < 1$ و لنبين أن : $0 \leq u_{n+1} < 1$ و نعلم أن : $0 \leq u_n < 1$ (حسب افتراض التراجع)إذن : $0 \leq \frac{1}{4}u_n < \frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} < \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$ أي : $0 < \frac{3}{4} \leq u_{n+1} < 1$ و منه $0 \leq u_{n+1} < 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ ب - لنبين أن : $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(1 - u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} - u_n$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 \right) u_n + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{3}{4}(1 - u_n)$$

و منه المطلوب :

ج- استنتاج :

لدينا $u_{n+1} - u_n = \frac{3}{4}(1 - u_n)$ و لدينا $u_n < 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$ إذن : $-u_n > -1$ أي : $1 - u_n > 0$ و منه : $u_{n+1} - u_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$ و هذا يعني أن المتتالية $(u_n)_n$ تزايدية :وبما أن المتتالية $(u_n)_n$ مكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة3- نضع : $v_n = u_n - 1$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} - 1$$

$$= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(u_n - 1) = \frac{1}{4}v_n$$

و منه المتتالية $(v_n)_n$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأولهو : $v_0 = u_0 - 1 = -1$

تتمة حل التمرين رقم 2 :

ب - $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$v_0 = -1$$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \cdot q^n$,

أي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$

استنتاج :

بما أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = u_n - 1$

فإن $(\forall n \in \mathbb{N}) , u_n = v_n + 1$

و منه $(\forall n \in \mathbb{N}) , u_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

ج- نهاية $(u_n)_n$

لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) , u_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1$

و لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ (لأن $-1 < \frac{1}{4} < 1$)

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

حل التمرين الثالث:

(1) أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 + \frac{1}{x} - 2 \ln(x) = +\infty$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow 0^+} -2 \ln(x) = +\infty$

ب- بما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

فإن (C) يقبل مقاربا عموديا معادلة $x = 0$

أ- * حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \ln(x) = -\infty$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

* حساب النهاية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + \frac{1}{x} - 2 \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2 \ln(x)}{x} = 0$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(x)}{x} = 0$

ب- مبيانيا: (C) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور

الأفاصيل بجوار $+\infty$

(2) أ- لنبين أن :

$$(\forall x \in]0, +\infty[), f'(x) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right)$$

$$f'(x) = \left(-1 + \frac{1}{x} - 2 \ln(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} - 2\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right)$$

ب- إشارة $f'(x)$: $x \in]0, +\infty[$

بما أن : $x \in]0, +\infty[$

فإن : $\frac{1}{x^2} > 0$ و $\frac{2}{x} > 0$

إذن : $\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} > 0$

و منه : $f'(x) < 0$

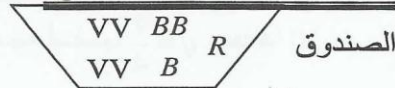
و هذا يعني أن f تناقصية قطعيا على $]0, +\infty[$

جدول تغيرات f هو :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$

(3) أ- لدينا : $f'(x) = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right)$

حل التمرين الرابع:



V : كرة خضراء

B : كرة بيضاء

R : كرة حمراء

ليكن Ω كون الامكانياتلدينا : $card\Omega = C_8^3 = 56$

(1) تحديد قيم X :

قيمة X	نوع السحبة
1	ثلاث كرات من نفس اللون
2	ثلاث كرات من لونين
3	ثلاث كرات مختلفة اللون مثلي مثلي

إذن : $X(\Omega) = \{1; 2; 3\}$ (2) $(X=1)$ هو حدث الحصول على ثلاث كرات من نفس اللونلدينا : $card(X=1) = C_4^3 + C_3^3$

$$= 4 + 1 = 5$$

ومنه : $p(X=1) = \frac{5}{56}$ (3) $(X=3)$ هو حدث الحصول على ثلاث كرات مختلفة اللون مثلي مثلي

$$card(X=3) = C_1^1 C_3^1 C_4^1 = 12$$

ومنه : $p(X=3) = \frac{12}{56} = \frac{3}{14}$ نعلم أن : $p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) = 1$ إذن : $p(X=2) = 1 - (p(X=1) + p(X=3))$

$$= 1 - \left(\frac{5}{56} + \frac{12}{56} \right) = \frac{39}{56}$$

(4) حساب الأمل الرياضي

لدينا :

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum x_i p_i \\ &= 1p(X=1) + 2p(X=2) + 3p(X=3) \\ &= \frac{5}{56} + 2 \cdot \frac{39}{56} + 3 \cdot \frac{12}{56} = \frac{5 + 78 + 36}{56} \\ &= \frac{119}{56} \end{aligned}$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

$$f''(x) = - \left(- \frac{(x^2)'}{x^4} - \frac{2}{x^2} \right) \quad \text{و منه :}$$

$$= \frac{2x}{x^4} + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} \right)$$

بما أن $x > 0$ فإن $\frac{1}{x^3} > 0$ و منه : $f''(x) > 0$, $\forall x \in]0, +\infty[$

و هذا يعني أن (C) محدب (أو مقعر نحو الأرتايب الموجبة)

ب -

x	$\frac{1}{2}$	1	e
f(x)	$1 + 2\ln 2$	0	$-3 + \frac{1}{e}$

ج- معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في

النقطة $A = (1, 0)$ هي :

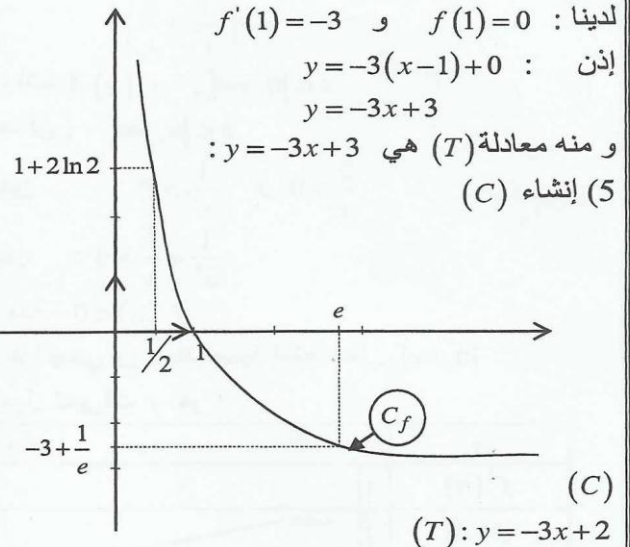
$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

لدينا : $f'(1) = -3$ و $f(1) = 0$ إذن : $y = -3(x-1) + 0$

$$y = -3x + 3$$

و منه معادلة (T) هي $y = -3x + 3$

(5) إنشاء (C)



$$(T): y = -3x + 2$$

x	1	1/3
y	0	2