

حل الأسئلة

$$S_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + \left(\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right)$$

التمرين رقم 1 :

1- (S) و (P) يتقاطعان وفق دائرة $d(\Omega, (P)) < r \iff$ لدينا

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1 + 0 - 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (0)^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < r$$

إذن (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (Γ) مركزها H وشعاعها R

2- H* هو المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P)،

إذن H تقاطع (P) والمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على

(P)، لدينا تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) هو :

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = -t \end{cases} \quad \text{ومنه إحداثيات H هي حل النظام}$$

$$\begin{cases} x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{ونجد} \quad \begin{cases} 1 + t + t + 1 = 0 \\ t = -1 \end{cases}$$

إذن $H(0, 0, 1)$

* شعاع الدائرة (Γ) معرف كما يلي $r^2 = d^2 + R^2$

ومنه $R = \sqrt{2}$ يعني $R^2 = r^2 - d^2 = 4 - 2 = 2$

التمرين رقم 2 :

1- حل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة :

$$(E): Z^2 + 2Z + 4 = 0$$

1- أ- لنحل المعادلة التفاضلية : $y'' + y' - 6y = 0$ (E)

نعتبر المعادلة المميزة $r^2 + r - 6 = 0$

لدينا $\Delta = 25$ ومنه $r_1 = -3$ و $r_2 = 2$

إذن الحل العام لـ (E) هو

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-3x} : (A, B \in \mathbb{R})$$

2- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}$ لدينا

$$1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \left[2, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$1 - i = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right]$$

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i} = \frac{\left[2, \frac{\pi}{3} \right]}{\left[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4} \right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right] \quad \text{إذن}$$

$$Z = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12} \right] \quad \text{يعني أن :}$$

3- نضع

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{-\sin(x)}{1 + \cos(x)} \\ v(x) = \sin(x) \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(1 + \cos(x)) \\ v'(x) = \cos(x) \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ln(1 + \cos(x)) dx \quad \text{ومنه}$$

$$= [\sin(x) \ln(1 + \cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos^2(x)}{1 + \cos(x)} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(x)) dx = [x - \sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(0) = 1 \\ \sin(0) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

4- لدينا $\forall n \in \mathbb{N}^* ; u_n = n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لنحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا $\Delta = -12$ ومنه
 $Z_1 = \frac{-2 + i\sqrt{12}}{2} = -1 + i\sqrt{3}$
 $Z_2 = \overline{Z_1} = -1 - i\sqrt{3}$
 $S = \{-1 - i\sqrt{3}; -1 + i\sqrt{3}\}$ إذن
 2- أ- بين أن: $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
 لدينا $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{-1 - i\sqrt{3} - 2}{-1 + i\sqrt{3} - 2} = \frac{-3 - i\sqrt{3}}{-3 + i\sqrt{3}}$
 أي $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = \frac{3 + i\sqrt{3}}{3 - i\sqrt{3}} = \frac{(3 + i\sqrt{3})^2}{12}$
 $= \frac{9 - 3 + 6i\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= [1, \frac{\pi}{3}] = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ومنه المطلوب .
 ب- طبيعة المثلث ABC :
 لدينا $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}} = [1, \frac{\pi}{3}]$
 $\Leftrightarrow \left| \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \right| = 1$ و $\arg\left(\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 $\Leftrightarrow AC = AB$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$
 إذن ABC متساوي الأضلاع .

التمرين رقم 3 :

1- ليكن Ω كون الإمكانات ،
 لدينا $Card\Omega = C_6^1 = 6$
 * ليكن A حدث الحصول على كرة بيضاء
 لدينا $CardA = C_4^1 = 4$
 وبما أن الاحتمال منتظم فإن $p(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{2}{3}$
 2- في هذه التجربة لدينا اختبارات متكررة ومستقلة
 نعيد التجربة السؤال «1» خمس مرات متتابة باستقلالية (نعيد الكرة المسحوبة بعد كل مرة)
 ليكن B حدث الحصول على كرة بيضاء مرتين بالضبط
 يتحقق الحدث B عندما يتحقق A مرتين بالضبط من بين خمس مرات

حل المسألة

لدينا $\forall x \in]0, 2[; f(x) = \ln\left(\frac{x}{2-x}\right)$
 1- أ- حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = -\infty$
 لأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(X) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{2-x} = 0^+$
 * حساب $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = +\infty$

ب- لدينا φ دالة متصلة على $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ (1) لأنها مجموع دالتين متصلتين على $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ هما f و d الدالة $x \mapsto (-x)$ ثم لدينا $(\forall x \in]0, 2[) ;$

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{2-x(2-x)}{x(2-x)}$$

$$= \frac{x^2 - 2x + 2}{x(2-x)}$$

ونعلم أن $(\forall x \in]0, 2[) ; x(2-x) > 0$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) ; x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$ إذن $(\forall x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]) ; \varphi'(x) > 0$ (لأن $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right] \subset]0, 2[$) ومنه φ تزايدية قطعاً على $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ (2)

وحسب السؤال أ- لدينا $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \varphi\left(\frac{7}{4}\right) < 0$ إذن من (1) و (2) و (3) وحسب مبرهنة القيم الوسطية، فإن المعادلة $\varphi(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من المجال $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{4}\right]$ يعني أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً α بحيث $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$

مبانيًا : المنحنى (C) والمستقيم ذو المعادلة $y=x$ يتقاطعان في نقطة واحدة أفصولها α بحيث $\frac{3}{2} < \alpha < \frac{7}{4}$

4- لدينا f متصلة وتزايدية قطعاً على $]0, 2[$ أ- إذن فهي تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على $J = f(]0, 2[)$ ب- لنبين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$ نضع $y = f^{-1}(x) ; x \in \mathbb{R} ; y \in]0, 2[$ $\frac{y}{2-y} = e^x \leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{2-y}\right) = x \leftrightarrow f(y) = x \leftrightarrow y = f^{-1}(x)$ $y + e^x y = 2e^x \leftrightarrow (2-y)e^x = y \leftrightarrow x \in \mathbb{R} ; y = \frac{2e^x}{1+e^x} \leftrightarrow y(1+e^x) = 2e^x \leftrightarrow$ ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f^{-1}(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2-x} = +\infty$) ب- لدينا $f'(x) = \left(\frac{x}{2-x}\right)' = \frac{2}{(2-x)^2} = \frac{2}{x(2-x)} \quad \forall x \in]0, 2[$ ج- نعلم أن $f'(x) = \frac{2}{x(2-x)} \quad \forall x \in]0, 2[$ ولكل $x > 0 \quad \forall x \in]0, 2[$ لدينا $2-x > 0$ إذن $(\forall x \in]0, 2[) ; f'(x) > 0$ جدول تغيرات الدالة f :

x	0	2
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

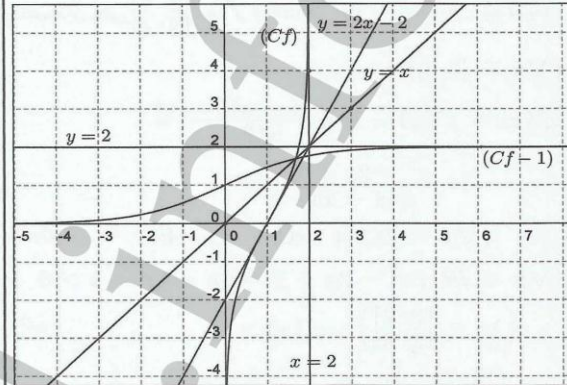
2- تذكير : تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان :

$(2a-x) \in D_f ; (\forall x \in D_f) *$

$(\forall x \in D_f) ; f(2a-x) + f(x) = 2b *$

أ- لدينا $A(1, 0)$ يعني $a = 1$ و $b = 0$ لدينا $(\forall x \in]0, 2[) ; 0 < 2-x < 2 \leftrightarrow -2 < -x < 0 \leftrightarrow 0 < x < 2$ ومنه $(2-x) \in]0, 2[$ ثم $f(2-x) + f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) + \ln\left(\frac{x}{2-x}\right) = \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) - \ln\left(\frac{2-x}{x}\right) = 0$ إذن النقطة $A(1, 0)$ مركز تماثل للمنحنى (C) ب- معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C) في $A(1, 0)$ لدينا $(T) : y = f'(1)(x-1) + f(1)$ إذن $(T) : y = 2(x-1) + 0$ يعني : $(T) : y = 2x - 2$ 3- نضع $(\forall x \in]0, 2[) ; \varphi(x) = f(x) - x$ أ- $\varphi\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{3}{2} = \ln(3) - \frac{3}{2} \simeq -0,4 < 0$ و $\varphi\left(\frac{7}{4}\right) = f\left(\frac{7}{4}\right) - \frac{7}{4} = \ln(7) - \frac{7}{4} \simeq 0,19 > 0$

5- إنشاء (C) و (Γ)



لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ $x=0$ مقارب عمودي لـ (C) بجوار $-\infty$

($y=0$ مقارب أفقي لـ (Γ) بجوار $-\infty$)

و $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$ $x=2$ مقارب عمودي لـ (C) بجوار $+\infty$

($y=2$ مقارب أفقي لـ (Γ) بجوار $+\infty$)

* (C) و (Γ) متماثلان بالنسبة للمستقيم $y=x$

المستقيم (T) يمر من النقطتين A و (0; -2)

6- أ- لدينا $\forall x \in \mathbb{R}; (1 + e^x)' = e^x$

ومنه
$$\int_0^{\alpha} \frac{e^x}{1 + e^x} dx = \int_0^{\alpha} \frac{(1 + e^x)'}{1 + e^x} dx$$
$$= [\ln(1 + e^x)]_0^{\alpha} = \ln\left(\frac{1 + e^{\alpha}}{2}\right)$$

ب- لدينا الحيز المطلوب مساحته تتكون من جزئين متماثلين

بالنسبة للمستقيم $y=x$ ومنه المساحة المطلوبة هي :

$$A = \left(2 \int_0^{\alpha} |f^{-1}(x) - x| dx\right) cm^2$$

وبما أن $\forall x \in [0, \alpha]; f^{-1}(x) \geq x$

فإن $|f^{-1}(x) - x| = f^{-1}(x) - x$

ومنه
$$A = 2 \int_0^{\alpha} |f^{-1}(x) - x| dx . cm^2$$

$$= \left(4 \ln\left(\frac{1 + e^{\alpha}}{2}\right) - \alpha^2\right) cm^2$$