

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

فإن :

$$\begin{aligned} M(a,b) \times M(c,d) &= acI + (ad + bc)J - bdI \\ &= (ac + bd)I + (ad + bc)J \\ &= M(ac - bd; ad + bc) \end{aligned}$$

$$M(a,b) \times M(c,d) \in E$$

خلاصة : $(E, \times)$ جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$

ب- لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^* / Z = a + ib \quad Z' = a' + ib' \\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 ; (a', b') \in \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} f(z \times z') &= f((a + ib) \times (a' + ib')) \\ &= f((aa' - bb') + i(ab' + ba')) \\ &= M(aa' - bb', ab' + ba') \end{aligned}$$

لدينا :

وحسب السؤال (2) أ- فإن :

$$f(z \times z') = M(a,b) \times M(a',b') = f(z) \times f(z')$$

ومنه f تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

* نعلم أن :

$$(\forall M \in E^*) ; \exists ! (a, b) \in \mathbb{R}^2 / M = aI + bJ \\ (\text{لأن } (I, J) \text{ أساس لـ } E)$$

$$aI + bJ = M(a,b) = f(a + ib)$$

فإن :

$$(\forall M \in E^*) ; (\exists ! Z = a + ib \in \mathbb{C}^*) / M = f(a + ib) = f(z)$$

ومنه f تقابلي

خلاصة : f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

(3) بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.

بما أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

فإن $(E, +)$ زمرة تبادلية.

ومن جهة أخرى ، لدينا $(\mathbb{C}^*, \times)$

زمرة تبادلية و f تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(E^*, \times)$

فإن : $(E^*, \times)$ أيضا زمرة تبادلية .

Achamel.info

حل التمرين الأول :

(1) لنبين أن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

* لدينا : $M(0,0) = O$

O المصفوفة المنعدمة

ومنه : $O \in E$

إذن : $E \neq \emptyset$

* لكل $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E

ولكل α و β من $\mathbb{R}$ لدينا :

$$\alpha M(a,b) + \beta M(c,d)$$

$$= M(\alpha a, \alpha b) + M(\beta c, \beta d)$$

$$= M(\alpha a, \beta c, \alpha b + \beta d)$$

$$\alpha M(a,b) + \beta M(c,d) \in E$$

إذن :

ومنه فإن $(E, +, \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

ب- لنبين أن الأسرة (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

* لدينا :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3}b \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}b & 0 \end{pmatrix}$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= aI + bJ$$

ومنه الأسرة (I, J) مولدة للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

* ليكن (α, β) من $\mathbb{R}$ بحيث : $\alpha I + \beta J = 0$

$$\alpha I + \beta J = M(\alpha, \beta)$$

بما أن :

$$\alpha I + \beta J = 0 \Leftrightarrow M(\alpha, \beta) = 0$$

فإن :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

ومنه (I, J) أسرة حرة في E .

خلاصة : (I, J) أساس للفضاء المتجهي $(E, +, \cdot)$

(2) أ- لنبين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

لكل $M(a,b)$ و $M(c,d)$ من E

$$M(a,b) \times M(c,d) = (aI + bJ) \times (cI + dJ)$$

لدينا

$$= acI + (ad + bc)J + bdJ^2$$

(ب) حل المعادلة (G)
 نعلم أن مميز (G) هو: $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$ ومنه:

$$Z_1 = \frac{-(a + \bar{a} - i) + a - \bar{a} - i}{2i}$$

$$= \frac{-2\bar{a}}{2i} = i\bar{a}$$

$$Z_2 = \frac{-(a + \bar{a} - i) - a + \bar{a} + i}{2i}$$

$$= \frac{-2a + 2i}{2i} = 1 + ia$$
 ومنه مجموعة حلول المعادلة (G) هي: $S = \{Z_1, Z_2\}$
 (2) لنبين أن:
 $\text{Re}(a) = \text{Im}(a)$ يكافئ (G) حل لـ a
 $a = 1 + ia$ أو $a = ia$ يكافئ (G) حل لـ a
 $a = 1 + ia \Leftrightarrow a(1 - i) = 1$ لدينا:

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{1 - i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$
 وهذا يعني في هذه الحالة أن: $\frac{1}{2}$
 $a = i\bar{a} \Leftrightarrow \text{Re}(a) + i\text{Im}(a) = \text{Im}(a) + i\text{Re}(a)$ و
 $\Leftrightarrow \text{Re}(a) = \text{Im}(a)$

خلاصة:
 $\text{Re}(a) = \text{Im}(a)$ يكافئ (G) حل لـ a
 (II)
 (1) أ- لنتحقق من أن:

$$\bar{Z} = \frac{(i - 1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$$

$$Z = \frac{(1 - ia) - a}{i\bar{a} - a}$$

$$\bar{Z} = \frac{(1 - ia) - \bar{a}}{i\bar{a} - \bar{a}}$$

$$= \frac{1 - i\bar{a} - \bar{a}}{-i\bar{a} - \bar{a}} = \frac{i(-i - \bar{a} + i\bar{a})}{i(-\bar{a} + i\bar{a})}$$

$$= \frac{(i - 1)\bar{a} - i}{i\bar{a} - a}$$

ب- لنبين أن:
 $\text{Im}(a) = \frac{1}{2}$ مستقيمة يكافئ A و B و C
 تكون النقط A(a) و B(i\bar{a}) و C(1 + ia)
 مستقيمة إذا وفقط إذا كان $\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}$
 إذا وفقط إذا كان $Z \in \mathbb{R}$
 يعني: $Z = \bar{Z}$

وبما أن الجداء توزيعي بالنسبة للجمع في $M_2(\mathbb{R})$ و E جزء مستقر من $M_2(\mathbb{R})$
 بالنسبة للجداء والجمع. فإن الجداء يبقى توزيعيا على الجمع كذلك في E.

خلاصة: $(E, +, \times)$ جسم تبادلي.
 (4) لنحل في E المعادلة: $J \times X^3 = I$
 $(x, y) \in \mathbb{R}^2 / X = M(x, y)$ نضع:
 $J \times X^3 = I \Leftrightarrow f^{-1}(J \times X^3) = f^{-1}(I)$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(J) \times f^{-1}(X^3) = f^{-1}(I)$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(J) \times (f^{-1}(X))^3 = f^{-1}(I)$
 $f^{-1}(I) = 1$ بما أن:
 $f^{-1}(J) = i$ و
 $f^{-1}(X) = x + iy = Z$
 $J \times X^3 = I \Leftrightarrow i \times Z^3 = 1$ فإن:

$$\Leftrightarrow Z^3 = \frac{1}{i} = -i = i^3$$

$$\Leftrightarrow Z^3 - i^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (Z - i)(Z^2 + iZ - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = i \text{ أو } Z^2 + iZ - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = i \text{ أو } Z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

أو: $Z = \frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
 وبالتالي مجموعة حلول المعادلة المقترحة في E هي:

$$S = \left\{ M(0, 1) = J; M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right); M\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right) \right\}$$

حل التمرين الثاني:

(I)
 (1) أ- التحقق من أن مميز المعادلة (G) هو: $\Delta = (a - \bar{a} - i)^2$
 لدينا:

$$\Delta = (a + \bar{a} - i)^2 - 4i(-\bar{a} - ia\bar{a})$$

$$= (a + \bar{a})^2 - 2i(a + \bar{a}) - 1 + 4i\bar{a} - 4\bar{a}$$

$$= a^2 + 2a\bar{a} + \bar{a}^2 - 2ia - 2i\bar{a} + 4i\bar{a} - 4a\bar{a} - 1$$

$$= a^2 + \bar{a}^2 - 1 - 2a\bar{a} - 2ia + 2i\bar{a}$$

$$= (a + \bar{a} - i)^2$$

$$\left((x - y - z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy - 2xz + 2yz \right)$$

$$\frac{c' - b'}{Z_E - Z_A} \in i\mathbb{R} \quad \text{فإن :}$$

$$(B'C') \perp (AE) \quad \text{ومنه}$$

ثم :

$$\left| \frac{c' - b'}{Z_E - Z_A} \right| = |2i|$$

$$\Leftrightarrow |c' - b'| = 2|Z_E - Z_A|$$

$$\Leftrightarrow B'C' = 2AE$$

خلاصة :

$$(B'C') \perp (AE)$$

$$B'C' = 2AE \quad \text{و}$$

حل التمرين الثالث :

(I)

$$35 \times 11 - 96 \times 4 \quad \text{لدينا :}$$

$$= 385 - 384 = 1$$

ومنه (11,4) حل للمعادلة (E).

(2) استنتاج :

$$35u - 96v = 1$$

$$35 \times 11 - 96 \times 4 = 1$$

و

$$35c - 96v = 35 \times 11 - 96 \times 4$$

إذن :

$$(*) 35(u - 11) = 96(v - 4)$$

ومنه 96 يقسم $35(u - 11)$

$$96 \mid 35(u - 11) \quad \text{وبما أن } 1 = 35 \wedge 96 \text{ فإن}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) / u - 11 = 96k$$

إذن :

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) / u = 11 + 96k$$

وبالتعويض في المعادلة (*) نجد :

$$35k = v - 4$$

إذن :

$$v = 4 + 35k$$

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(11 + 96k, 4 + 35k) / k \in \mathbb{Z}\}$$

(II)

(1) أ لنبين أن 97 أولي

ليكن p عددا أوليا بحيث $p^2 \leq 97$

$$p \in \{2, 3, 5, 7\}$$

إذن :

$$97 = 2 \times 48 + 1$$

لدينا :

$$97 = 3 \times 32 + 1$$

و

$$97 = 5 \times 19 + 2$$

و

$$97 = 7 \times 13 + 6$$

$$Z = \bar{Z} \Leftrightarrow \frac{(1 + ia) - a}{ia - a} = \frac{(i - 1)\bar{a} - i}{ia - a}$$

$$\Leftrightarrow (1 + ia) - a = (i - 1)\bar{a} - i$$

$$\Leftrightarrow 1 + ia - a - i\bar{a} + \bar{a} + i = 0$$

$$\Leftrightarrow i(a - \bar{a}) - (a - \bar{a}) = -1 - i$$

$$\Leftrightarrow (a - \bar{a})(i - 1) = -1 - i$$

$$\Leftrightarrow a - \bar{a} = \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow a - \bar{a} = i$$

$$\Leftrightarrow 2i \operatorname{Im}(a) = i$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}$$

خلاصة :

A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان $\operatorname{Im}(a) = \frac{1}{2}$

(2) نفترض أن $\operatorname{Im}(a) \neq \frac{1}{2}$

أ- لنحدد b' و c' بحيث $B'(b')$ و $C'(c')$

و $R_1(B) = B'$ و $R_2(C) = C'$

$$R_1(B) = B' \Leftrightarrow Z_B - Z_A = e^{-i\frac{\pi}{2}}(Z_B - Z_A)$$

$$\Leftrightarrow b' - a = -i(i\bar{a} - a)$$

$$\Leftrightarrow b' = a + \bar{a} + ia = (1 + i)a + \bar{a}$$

$$R_2(C) = C' \Leftrightarrow Z_C - Z_A = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z_C - Z_A)$$

$$\Leftrightarrow c' - a = i(1 + ia - a)$$

$$\Leftrightarrow c' = a + i - a - ia$$

$$\Leftrightarrow c' = i(1 - a)$$

خلاصة :

$$c' = i(1 - a) \quad \text{و} \quad b' = (1 + i)a + \bar{a}$$

ب- لنبين أن $(B'C') \perp (AE)$

لدينا :

$$c' - b' = i(1 - a) - (1 + i)a - \bar{a}$$

$$= i - ia - a - ia - \bar{a}$$

$$= -(a + \bar{a}) + i(1 - 2a)$$

ومن جهة أخرى لدينا :

$$Z_E - Z_A = \frac{Z_B + Z_C}{2} - a$$

$$= \frac{i\bar{a} + 1 + ia - 2a}{2} = \frac{(1 - 2a) + i(a + \bar{a})}{2}$$

$$\frac{c' - b'}{Z_E - Z_A} = \frac{-(a + \bar{a}) + i(1 - 2a)}{\frac{i(a + \bar{a}) + (1 - 2a)}{2}}$$

ومنه

$$= 2i \frac{(1 - 2a) + i(a + \bar{a})}{(1 - 2a) + i(a + \bar{a})} = 2i$$

$$\frac{c' - b'}{Z_E - Z_A} = 2i$$

بما أن :

خلاصة: إذا كان x يحقق $x \equiv 2^{11}[97]$ فإن x حل ل (F).

(3) لدينا حسب السؤالين (1) و (2)

$x \equiv 2^{11}[97]$ يكافئ (F) حل ل

$$2^{11} = 2048 = 21 \times 97 + 11 \quad \text{بما أن:}$$

$$2^{11} \equiv 11[97] \quad \text{فإن:}$$

$$x \equiv 2^{11}[97] \Leftrightarrow x \equiv [97] \quad \text{ومنه:}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) / x \equiv 11 + 97k$$

خلاصة: مجموعة حلول المعادلة (E) هي:

$$S = \{11 + 97k / k \in \mathbb{N}\}$$

حل التمرين الرابع:

(I)-

(1) أ- لنحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-x^2}$$

نضع $x = -x^2$ ومنه: $(x \rightarrow -\infty) \Leftrightarrow (x \rightarrow +\infty)$

ومنه:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^x = 0$$

إذن المنحني (C) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = 2x$ بجوار $+\infty$

ب- * لنحسب $f'(x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}_+$)

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+$ كمجموع دالتين قابلتين للاشتقاق

على $\mathbb{R}_+$ هما: $x \rightarrow 2x$ و $x \rightarrow -e^{-x^2}$

ولدينا:

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+); f'(x) = 2 + 2x e^{-x^2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+); f'(x) = 2(1 + x e^{-x^2})$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) e^{-x^2} > 0 \text{ و } x \geq 0 \quad \text{بما أن:}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+) f'(x) > 0 \quad \text{فإن:}$$

إذن f تزايدية قطعيا على $\mathbb{R}_+$

* جدول تغيرات f هو:

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - e^{-x^2}) = +\infty$$

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$

ج- لنبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha \in \mathbb{R}_+$

لدينا f متصلة و تزايدية قطعيا على $\mathbb{R}_+$ و $f(\mathbb{R}_+) = [-1, +\infty[$

ومنه 97 لا يقبل القسمة على p

حيث $97 \leq p^2$ وهذا يعني أن 97 عدد أولي.

ب- لنبين أن: $x^{96} \equiv 1[97]$

نعلم أن: $x^{35} \equiv 2[97]$

نضع: $d = x \wedge 97$

بما أن 97 عدد أولي و $d/97$

فإن $d=1$ أو $d=97$

إذا كان $d=97$ فإن d يقسم x ومنه 97 يقسم x^{35}

وهذا يعني أن: $x^{35} \equiv 0[97]$ (لا يمكن)

ومنه فإن: $d=1$

لدينا إذن: 97 عدد أولي و $x \wedge 97$

إذن حسب مبرهنة فيرما. فإن:

يعني:

$$x^{97-1} \equiv 1[97]$$

$$x^{96} \equiv 1[97]$$

ج) لنبين أن: $x \equiv 2^{11}[97]$

لدينا: $x^{35} \equiv 2[97]$

ومنه: $(x^{35})^{11} \equiv 2^{11}[97]$

يعني: $x^{385} \equiv 2^{11}[97]$

ولدينا: $385 = 1 + 96 \times 4$

ومنه: $x^{(1+96 \times 4)} \equiv 2^{11}[97]$

أي: $x \cdot (x^{96})^4 \equiv 2^{11}[97]$

ونعلم أن: $x^{96} \equiv 1[97]$

إذن: $(x^{96})^4 \equiv 1[97]$

وبالتالي:

$$x \cdot (x^{96})^4 \equiv x[97]$$

إذن: $x \equiv 2^{11}[97]$

(2) لنبين أن:

إذا كان x يحقق $x \equiv 2^{11}[97]$ فإن x حل للمعادلة (F).

نفترض أن x يحقق العلاقة: $x \equiv 2^{11}[97]$

ومنه: $x^{35} \equiv (2^{11})^{35}[97]$

$x^{35} \equiv 2^{11 \times 35}[97]$

لدينا: $11 \times 35 = 385 = 1 + 96 \times 4$

وبما أن: $x \wedge 97 = 1$ فإنه حسب مبرهنة فيرما نجد:

$$2^{96} \equiv 1[97]$$

إذن: $(2^{96})^4 \equiv 1[97]$

أي: $2^{(1+96 \times 4)} = 2(2^{96})^4$

$2(2^{96})^4 \equiv 2[97]$

$2^{35 \times 11} \equiv 2[97]$

$x^{35} \equiv 2[97]$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e} < e^{-c^2} < 1$$

$$\int_0^1 e^{-t^2} dt = e^{-c^2} < 1$$
 إذن :

(2) أ- لنبين أن : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt$ لدينا :

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha f(t) dt &= \int_0^\alpha (2t - e^{-t^2}) dt \\ &= \int_0^\alpha 2t dt - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt \\ &= [t^2]_0^\alpha - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt \\ &= \alpha^2 - \int_0^\alpha e^{-t^2} dt = g(\alpha) \end{aligned}$$
 ومنه المطلوب .

ب- لدينا الدالة : $x \rightarrow e^{-x^2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$
 إذن تقبل دالة أصلية l على $\mathbb{R}^+$
 ولدينا : $\int_0^x e^{-t^2} dt = l(x) - l(0)$
 ومنه الدالة : $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$
 ولدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^+); \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)' = l'(x) = e^{-x^2}$

ومنه الدالة g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ ، ولدينا :
 $(\forall x \in \mathbb{R}^+); g'(x) = 2x - e^{-x^2} = f(x)$

ج- لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\beta \in]\alpha, 1[$
 لدينا g متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $[\alpha, 1]$
 لأن $g'(x) = f(x) > 0$ لكل x من $[\alpha, 1]$ ، حسب (1) د-
 وبما أن : $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(t) dt < 0$
 لأن : $\forall t \in]0, \alpha[f(t) < 0$
 و $g(1) = 1 - \int_0^1 e^{-t^2} dt > 0$
 لأن : $\int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$
 فإن حسب مبرهنة القيم الوسطية المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β بحيث $\alpha < \beta < 1$
 ومنه المطلوب .

(3) أ- لنبين أن φ متصلة على اليمين في 0.
 لكل t من المجال $[0, x]$ ، لدينا :

$$0 \leq t \leq x \Leftrightarrow 0 \leq t^2 \leq x^2$$

$$\Leftrightarrow -x^2 \leq -t^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x^2} \leq e^{-t^2} \leq 1$$

إذن f تقابل من $\mathbb{R}^+$ نحو $[-1, +\infty[$
 وبما أن $0 \in [-1, +\infty[$ فإن له سابقاً وحيداً α من $\mathbb{R}^+$
 إذن : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α من $\mathbb{R}^+$
 وبما أن : $f(0) = -1 < 0$
 و : $f(1) = 2 - \frac{1}{e} > 0$
 فإنه حسب مبرهنة القيم الوسطية $0 < \alpha < 1$
 د- إشارة $f(x)$ على المجال $[0, 1]$
 بما أن f تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ و $f(\alpha) = 0$ فإن :

$$\begin{cases} \forall x \in [0, \alpha[; f(x) < 0 \\ \forall x \in]\alpha, 1]; f(x) > 0 \end{cases}$$
 إنشاء (C)

معادلة المماس ل (C) في النقطة $(0, -1)$ هي $y = 2x - 1$

(II)
 (1) أ- لنبين أن :
 $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\exists c \in]0, x[): \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

لدينا : الدالة : $F: u \rightarrow \int_0^u e^{-t^2} dt$ متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$
 و $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); F'(x) = e^{-x^2}$
 إذن بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية على الدالة F في المجال $]0, x[$ لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\exists c \in]0, x[): F(x) - F(0) = xF'(c)$$

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = xe^{-c^2}$$
 أي :
 وبالتالي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)(\exists c \in]0, x[): \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$$
 ب- استنتاج :
 نأخذ $x = 1$ إذن : $(\exists c \in]0, 1[): \int_0^1 e^{-t^2} dt = e^{-c^2}$

$$c \in]0, 1[\Leftrightarrow 0 < c^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < -c^2 < 0$$

وبما أن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); -\frac{2}{x^2} < 0$ وأي: $\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt > 0$ فإن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi'(x) < 0$ إذن φ دالة تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$ ومنه: $\varphi([0,1]) = [\varphi(1), \varphi(0)] = [\varphi(1), 1]$ وبما أن: $0 < \varphi(1) = \int_0^1 e^{-t^2} dt < 1$ فإن: $[\varphi(1), 1] \subset [0,1]$ ومنه: $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$ وهذا هو المطلوب.

(4) أ- لدينا: $(\forall t \in \mathbb{R}^*); -t^2 \leq 0$ أي: $t^2 e^{-t^2} \leq t^2$ ومنه: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \int_0^x t^2 dt$ إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x$ وبالتالي: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$ ب- لنبين أن: $(\forall x \in]0,1[); |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$ لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); 0 \leq \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq \frac{x^3}{3}$ $(\forall x \in \mathbb{R}^*); -\frac{2}{3}x \leq \frac{-2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq 0$ إذا كان: $x \in]0,1[$ فإن $0 < x < 1$ ومنه: $-\frac{2}{3} < \frac{-2}{3}x < 0$ وبالتالي: $(\forall x \in]0,1[); -\frac{2}{3} \leq \frac{-2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \leq 0$ إذن: $(\forall x \in]0,1[); |\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$ وهذا هو المطلوب.

ج- لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = x$ $\Leftrightarrow \int_0^x e^{-t^2} dt = x^2$ $\Leftrightarrow x^2 - \int_0^x e^{-t^2} dt = 0$ $\Leftrightarrow g(x) = 0$ ومنه: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \Leftrightarrow \varphi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$

إذن: أي: $\int_0^x e^{-x^2} dt \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x dt$ $xe^{-x^2} \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq x$ إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); e^{-x^2} \leq \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq 1$ وبما أن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x^2} = 1$ فإن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1$ يعني: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = 1 = \varphi(0)$ ومنه φ متصلة على اليمين في 0. ب- لنبين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = \frac{1}{x} \int_0^x e^{-t^2} dt$ نضع: $\begin{cases} u'(t) = -2te^{-t^2} \\ v(t) = t \end{cases}$ نجد: $\begin{cases} u(t) = e^{-t^2} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$ ومنه: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = \frac{1}{x} \left[te^{-t^2} \Big|_0^x + 2 \int_0^x te^{-t^2} dt \right]$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi(x) = e^{-x^2} + \frac{2}{x} \int_0^x te^{-t^2} dt$ ومنه المطلوب.

ج- الدالة $t \mapsto t^2 e^{-t^2}$ متصلة على $\mathbb{R}_+^*$ ومنه تقبل دالة أصلية على $\mathbb{R}_+^*$ إذن الدالة $x \mapsto \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ، ولدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \left(\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right)' = x^2 e^{-x^2}$ والدالة $x \mapsto e^{-x^2}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ والدالة $x \mapsto \frac{2}{x}$ أيضاً قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن: φ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ ولدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi'(x) = (e^{-x^2})' + \left(\frac{2}{x} \right)' \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt + \frac{2}{x} \left(\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt \right)'$ $= -2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt + \frac{2}{x} x^2 e^{-x^2}$ $= -2xe^{-x^2} + 2xe^{-x^2} - \frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$ د- لنبين أن: $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$ لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*); \varphi'(x) = -\frac{2}{x^2} \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$

(5) لنبين بالترجع أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = \frac{2}{3}$

ومنه : $0 \leq U_0 \leq 1$

نفترض أن : $0 \leq U_n \leq 1$

وبما أن : $\varphi([0,1]) \subset [0,1]$

فإن : $0 \leq \varphi(U_n) \leq 1$

أي : $0 \leq U_{n+1} \leq 1$

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq U_n \leq 1$

ب- لنبين بالترجع أنه :

$(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$
من أجل $n=0$ لدينا

$|U_0 - \beta| = \left|\frac{2}{3} - \beta\right| \leq |1 - 0| = 1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$
نفترض أن :

$|U_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ولنبين أن : $|U_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

لدينا : $|U_{n+1} - \beta| = |\varphi(U_n) - \beta|$

وبما أن : $\varphi(\beta) = \beta \quad g(\beta) = 0$

ومنه : $|U_{n+1} - \beta| = |\varphi(U_n) - \varphi(\beta)|$

وبتطبيق متفاوتة التزايد المتناهية على المجال الذي طرفاه U_n و β

فإن : $|\varphi(U_n) - \varphi(\beta)| \leq \frac{2}{3} |U_n - \beta|$

وباستعمال فرضية التراجع : $|U_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

نجد : $|\varphi(U_n) - \varphi(\beta)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

أي : $|U_{n+1} - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}); |u_n - \beta| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ج- بما أن : $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \beta$

وبالتالي فإن $(U_n)_n$ متقاربة ونهايتها هي β .