

Achamel.info

## تصحيح الدورة العادية 2009

## التمرين رقم 1 :

$$d(\Omega, (OCD)) = \frac{|2+8+8|}{\sqrt{1+4+4}} = \frac{18}{3} = 6 \quad \text{إذن}$$

ب-استنتاج :

$$d(\Omega, (OCD)) = 6 = r \text{ أن}$$

إذن المستوى (OCD) مماس للكرة (S).

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \quad \text{ج-لنتحقق من أن:}$$

$$\vec{OB}(6;6;0) \text{ و } \vec{OA}(-2;2;8) \text{ لدينا}$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = -12 + 12 + 0 = 0 \quad \text{ومنه}$$

\* استنتاج :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0 \quad \text{بما أن } O \in (S) \text{ فإن}$$

$$O \in (OCD) \quad \text{ونعلم أن}$$

إذن O هي نقطة تماس (S) و (OCD).

## التمرين رقم 2 :

1- لنكتب على الشكل المثلي العددين العقديين a و b :

$$\text{لدينا } a = 2 - 2i \quad \text{ومنه } |a| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \quad \text{إذن}$$

$$a = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 2\sqrt{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$= 2\sqrt{2} \left( \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

$$a = \left[ 2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right] \quad \text{إذن}$$

$$|b| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1 \quad \text{ومنه } b = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{لدينا}$$

$$b = 1 \left( -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) \quad \text{إذن}$$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$b = \left[ 1; \frac{5\pi}{6} \right] \quad \text{إذن}$$

2- لنبين أن  $z' = bz$ 

$$\text{لدينا: } R(M) = M'$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{OM}, \vec{OM'}) = \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

1- لنحدد متلوث إحداثيات المتجهة  $\vec{OC} \wedge \vec{OD}$ 

$$\vec{OD}(0,1,-1) \text{ و } \vec{OC}(2,-1,0) \text{ لدينا}$$

$$\vec{OC} \wedge \vec{OD} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OC} \wedge \vec{OD}(1;2;2) \quad \text{إذن}$$

\* استنتاج :

$$\vec{n} = \vec{OC} \wedge \vec{OD} \text{ محدد بالنقطة } O \text{ والمتجهة } (OCD)$$

منظمة عليه .

$$\text{إذن لكل } M \text{ ذات الإحداثيات } (x,y,z) \text{ من } (OCD)$$

$$\text{لدينا: } \vec{OM} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{ومنه } x+2y+2z=0$$

$$\text{إذن } x+2y+2z=0 \text{ هي معادلة ديكارتية للمستوى } (OCD)$$

2- لنتحقق من أن (S) كرة  $\Omega(2,4,4)$  وشعاعها  $r=6$ 

$$\text{لدينا } (S) \text{ هي مجموعة النقاط } M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ بحيث: } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0$$

$$\text{إذن } (S) \text{ هي الكرة التي أحد أقطارها } [AB]$$

طريقة 1 : مركز (S) هو  $\Omega$  منتصف القطعة [AB]

$$\text{ومنه } \Omega(2,4,4) \text{ وشعاعها } r = \frac{AB}{2} = 6$$

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0 \quad \text{طريقة 2 : لدينا}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \\ z-8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ y-6 \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-6) + (y-2)(y-6) + z(z-8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 12 + y^2 - 8y + 12 + z^2 - 8z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4x + 4) - 4 + (y^2 - 8y + 16) - 16$$

$$+ (z^2 - 8z + 16) - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 6^2$$

$$\text{إذن مركز الكرة } (S) \text{ هو } \Omega(2,4,4) \text{ وشعاعها } r=6$$

3- أ- لنحسب مسافة النقطة  $\Omega$  عن المستوى (OCD) :

$$\text{لدينا: } 0 : x+2y+2z = (OCD) \text{ و } \Omega(2,4,4)$$

ومنه  $CardA = C_3^3 + C_4^3 + C_5^3 = 1 + 4 + 10 = 15$   
 ومنه  $P(A) = \frac{CardA}{Card\Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$   
 ولدينا  $B = \{NBR\}$   
 ومنه  $CardB = C_4^1 + C_3^1 + C_5^1 = 60$   
 2- أ- لنحدد قيم  $X$ :

| نوع الامكانيات                 | قيم $X$ |
|--------------------------------|---------|
| $A = \{BBB; NNN; RRR\}$        | 1       |
| $BBN; NNB; BBR; RRB; BBR; RRB$ | 2       |
| $B = \{NBR\}$                  | 3       |

إذن  $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$

ب- لنحدد قانون احتمال المتغير العشوائي  $X$ :

$$P(X = 1) = P(A) = \frac{3}{44}$$

$$P(X = 3) = P(B) = \frac{3}{11}$$

$$P(X = 2) = 1 - (P(X = 1) + P(X = 3))$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{44} + \frac{3}{11}\right) = 1 - \frac{15}{44}$$

$$P(X = 2) = \frac{29}{44}$$

\* حساب الأمل الرياضي  $E(X)$ :

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 x_i P(X = x_i)$$

$$= 1 \cdot P(X = 1) + 2P(X = 2) + 3P(X = 3)$$

$$= \frac{3}{44} + \frac{58}{44} + \frac{9}{11} = \frac{97}{44}$$

#### التمرين رقم 4 :

1- لنتحقق من أن  $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ :

$$1 - \frac{3}{x+3} = \frac{x+3-3}{x+3} = \frac{x}{x+3}$$

ومنه المطلوب

ب- لنبين أن  $I = 1 - 3 \ln 2$ :

$$I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z'}{z} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z'}{z}\right) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z'}{z} = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right] = b$$

$$\Leftrightarrow z' = bz$$

ومنه المطلوب .

ب- لنتحقق من أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $A$  بالدوران  $R$ :

$$Z_A = a = 2 - 2i$$

لدينا:

$$Z_C = c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$$

و

ومنه

$$ba = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)(2 - 2i) = -\sqrt{3} + \sqrt{3}i + i + 1$$

$$= (1 - \sqrt{3}) + i(1 + \sqrt{3}) = c$$

إذن  $c = ba$  ومنه  $R(A) = C$  وهذا هو المطلوب .

3- لنبين أن:  $\arg c \equiv \arg a + \arg b [2\pi]$

لدينا:  $R(A) = C$

$$\Leftrightarrow ba = c$$

$$\Leftrightarrow \arg(ba) \equiv \arg c [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg c \equiv \arg a + \arg b [2\pi]$$

وهذا هو المطلوب .

\* استنتاج:

$$\arg b \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi] \text{ و } \arg a \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$$

$$\arg c \equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$

إذن:

$$\arg c \equiv \frac{7\pi}{12} [2\pi]$$

#### التمرين رقم 3 :

$$\begin{array}{ccc} BB & NN & RR \\ B & NN & RR \end{array} R$$

$B$ : كرة بيضاء

$R$ : كرة حمراء

$N$ : كرة سوداء

1- ليكن  $\Omega$  كون الإمكانات، بما أن السحب في آن واحد فإن كل سحبة هي تأليف.

$$Card\Omega = C_{12}^3 = 220$$

$$* \text{ لنبين أن: } P(A) = \frac{3}{44} \text{ و } P(B) = \frac{3}{11}$$

لدينا:  $A = \{BBB; NNN; RRR\}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0 \text{ وأن } \left( e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0 \Leftrightarrow e^x \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} \right) > 0 \right)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

\* حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  - لدينا :

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \text{ ومنه}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ إذن:}$$

$$* \text{ لتبين أن } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 4 \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \ln(2) = \ln(4) \text{ ومنه:}$$

$$* \text{ التأويل الهندسي للنهاية } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ln 4 \text{ بما أن}$$

فإن المستقيم الذي معادلته  $y = \ln 4$  مقارب أفقي للمنحنى (C) بجوار  $-\infty$

$$3- \text{ أ- لتبين أن } (\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$$

$$f(x) = 2 \ln[(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1] \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R} :$$

$$f'(x) = \frac{[(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1]'}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} \text{ ومنه}$$

$$= 2 \cdot \frac{2(\sqrt{e^x} - 1)'(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$$

$$= 2 \cdot \frac{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{e^x} (\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1}$$

$$(\text{ملاحظة: لدينا } \sqrt{e^x} = e^{\frac{x}{2}} \text{ ومنه } \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} = (\sqrt{e^x})' )$$

$$\text{إذن: } f'(0) = \frac{2(1-1)}{(1-1)^2 + 1} = 0$$

$$\text{ب-} * \text{ لندرس إشارة } \sqrt{e^x} - 1 \text{ على } \mathbb{R} :$$

$$\text{لدينا } \sqrt{e^x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{وبما أن } \frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$$

فإن

$$I = \int_{-2}^{-1} \left( 1 - \frac{3}{x+3} \right) dx = \int_{-2}^{-1} \left( 1 - 3 \cdot \frac{(x+3)'}{x+3} \right) dx$$

$$= [x - 3 \ln|x+3|]_{-2}^{-1}$$

$$= (-1 - 3 \ln(2)) - (-2 - 3 \ln(1))$$

$$= 1 - 3 \ln(2)$$

2- لتبين باستعمال مكاملة بالأجزاء أن  $J = -I$  :

$$\text{لدينا: } J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6) dx$$

$$\text{لنضع: } \begin{cases} u = x \\ v' = \frac{1}{x+3} \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} u' = 1 \\ v = \ln(2x+6) \end{cases}$$

$$\text{ومنه } J = [x \ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3} dx$$

$$= -\ln(4) + 2 \ln(2) - I$$

$$= -2 \ln(2) + 2 \ln(2) - I$$

$$J = -I \text{ إذن:}$$

حل المسألة :

1- I - لتتحقق من أن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$$

لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$  :

$$(\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1$$

$$= e^x - 2\sqrt{e^x} + 2$$

وهذا هو المطلوب .

\* استنتاج : لتكن  $D_f$  هي مجموعة تعريف الدالة  $f$

$$\text{لدينا: } x \in D_f \Leftrightarrow e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0; (x \in \mathbb{R})$$

وبما أن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); (\sqrt{e^x} - 1)^2 \geq 0 \text{ ونعلم أن}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 \geq 1 > 0 \text{ فإن:}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0 \text{ إذن:}$$

$$\text{ومنه: } D_f = \mathbb{R}$$

أي أن الدالة  $f$  معرفة على  $\mathbb{R}$  .

إذن المستقيم الذي معادلته  $y=2x$  مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار  $+\infty$

5-أ- نتحقق من أن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$$

لدينا لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ :

$$(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} - \sqrt{e^x} + 2 = e^x - 3\sqrt{e^x} + 2$$

وهذا هو المطلوب.

ب- لندرس إشارة  $\sqrt{e^x} - 2$

لدينا:  $\sqrt{e^x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} = 2 \Leftrightarrow e^x = 4 \Leftrightarrow x = \ln(4)$

و  $\sqrt{e^x} - 2 > 0 \Leftrightarrow x > \ln(4)$

و  $\sqrt{e^x} - 2 < 0 \Leftrightarrow x < \ln(4)$

ومنه إشارة  $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$  تلخص في الجدول التالي:

| $x$                                | $-\infty$ | $0$ | $\ln(4)$ | $+\infty$ |
|------------------------------------|-----------|-----|----------|-----------|
| $\sqrt{e^x} - 1$                   | -         | 0   | +        | +         |
| $\sqrt{e^x} - 2$                   | -         | -   | 0        | +         |
| $(\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2)$ | +         | 0   | -        | +         |

ج- استنتاج:

لدينا: حسب جدول الإشارة السابق:  $(\forall x \in [0; \ln 4]); (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) \leq 0$

ومنه  $(\forall x \in [0; \ln 4]); e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 \leq 0$

أي  $(\forall x \in [0; \ln 4]); e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \leq \sqrt{e^x}$

أي  $(\forall x \in [0; \ln 4]); \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq \ln(\sqrt{e^x})$

$(\forall x \in [0; \ln 4]); 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \leq 2 \cdot \frac{1}{2}x$

إذن  $(\forall x \in [0; \ln 4]); f(x) \leq x$

6- إنشاء المنحنى (C):

و  $\sqrt{e^x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{e^x} > 1 \Leftrightarrow x > 0$

و  $\sqrt{e^x} - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$

إذا كان  $x \geq 0$  فإن  $f'(x) \geq 0$  ومنه  $f$  تزايدية على المجال  $[0, +\infty[$

وإذا كان  $x \leq 0$  فإن  $f'(x) \leq 0$  ومنه  $f$  تناقصية على المجال  $]-\infty, 0]$

\* جدول تغيرات الدالة  $f$ :

| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----|-----------|
| $f(x)$  | -         | 0   | +         |
| $f'(x)$ | $\ln(4)$  | 0   | $+\infty$ |

4-أ- نتحقق من أن:

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$$

لدينا أولاً:  $1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} = \frac{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}{e^x}$

وبما أن  $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$  و  $e^x > 0$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ، فإن

$$(\forall x \in \mathbb{R}); 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$$

ثانياً:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \\ &= 2\ln\left[e^x\left(1 - \frac{2\sqrt{e^x}}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)\right] \\ &= 2\ln(e^x) + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\ &= 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \end{aligned}$$

وهذا هو المطلوب.

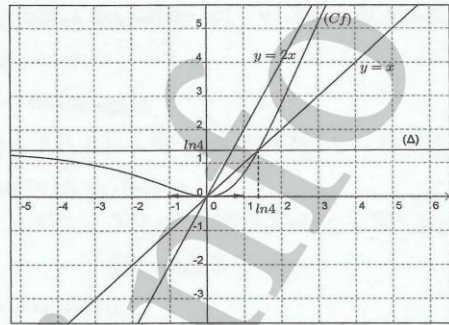
ب- لنبين أن المستقيم (D) مقارب للمنحنى (C) بجوار  $+\infty$

لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 0$

(لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{e^x}} = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$ )

ونعلم أن  $(u_n)_n$  تناقصية إذن فهي مكبورة بحدها الأول  $u_0=1$   
 إذن  $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq 1$   
 ومنه  $0 \leq l \leq 1$  وبالتالي  $l = 0$  أي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$



-II

1- لنبين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 \leq u_n \leq \ln 4$   
 من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0=1$  ومنه  $0 \leq u_0 \leq \ln 4$   
 ليكن  $n$  من  $\mathbb{N}$  ، نفترض أن  $0 \leq u_n \leq \ln 4$   
 وبما أن  $f$  تزايدية على المجال  $[0; \ln 4]$   
 فإن  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(\ln 4)$   
 أي:  $0 \leq u_{n+1} \leq \ln 4$

2- لنبين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية  
 نعلم أن  $(\forall n \in [0; \ln 4]); f(x) \leq x$   
 و  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in [0; \ln 4]$   
 إذن  $(\forall n \in \mathbb{N}); f(u_n) \leq u_n$   
 أي  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq u_n$   
 وهذا يعني أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية .  
 3- بما أن  $(u_n)_n$  تناقصية ومصفورة بالعدد 0 فإنها متقاربة .  
 \* نهاية  $(u_n)$  :

لدينا :  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$   
 و  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in [0; \ln 4]$   
 و  $f$  متصلة على المجال  $[0; \ln 4]$   
 و  $f([0; \ln 4]) \subset [0; \ln 4]$  و  $(u_n)_n$  متقاربة  
 فإن نهاية  $(u_n)$  هي  $l$  بحيث  $l$  حل للمعادلة  $f(x) = x$   
 و  $x \in [0; \ln 4]$   
 لدينا  $x \in [0; \ln 4]; f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0; x \in [0; \ln 4]$   
 $\Leftrightarrow (\sqrt{e^x} - 1)(\sqrt{e^x} - 2) = 0; x \in [0; \ln 4]$   
 $\Leftrightarrow x = 0 \quad x = \ln(4)$