

التمرين رقم 1 :

1- لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من الفلكة (S) لدينا :

$$\Omega M = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) + z^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0 \quad \text{إذن}$$

هي معادلة ديكارتية للفلكة (S) .

$$0^2 + 0^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$A(0, 0, 1) \in (S) \quad \text{فإن :}$$

$$2- \vec{AB}(1, 1, 0) \text{ و } \vec{AC}(2, 1, 1) \quad \text{إذن :}$$

$$\vec{AC} \wedge \vec{AB} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

المتجهة $(\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$ منظمية على المستوى (ABC)

$$\text{و منه } x - y - z + d = 0$$

بحيث $d \in \mathbb{R}$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) وبما أن $A \in (ABC)$ فإن $0 - 0 - 1 + d = 0$ أي $d = +1$ وبالتالي $x - y - z + 1 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

ب- لدينا

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|1 + 1 - 0 + 1|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

إذن المستوى (ABC) مماس للفلكة (S) في النقطة A (النقطة A مشتركة بين المستوى (ABC) والفلكة (S)).3- المستقيم (Δ) عمودي على المستوى (ABC) إذن فهو يقبلالمتجهة $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ كمتجهة موجهة له وبما أنه يمر من

$$\Omega(1, -1, 0) \quad \text{فإن :}$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = 0 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{تمثيل بارامترى للمستقيم } (\Delta)$$

ب- ليكن (a, b, c) مثلث إحداثيات نقطة تقاطع المستقيم (Δ) و الفلكة (S)

$$\begin{cases} a = 1 + t \\ b = -1 - t \\ c = -t \end{cases}$$

لدينا

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-0)^2 = 3$$

و

$$\begin{cases} a-1 = t \\ b+1 = -t \\ c = -t \end{cases}$$

أي

$$(a-1)^2 + (b+1)^2 + (c-0)^2 = 3$$

و

$$t^2 + t^2 + t^2 = 3$$

إذن

$$t^2 = 1 \quad \text{أي} \quad 3t^2 = 3$$

ومنه

$$t = -1 \quad \text{أو} \quad t = 1$$

وبالتالي

في حالة $t=1$: نجد $a=2$ و $b=-2$ و $c=-1$ إذن $(2, -2, -1)$ مثلث إحداثيات النقطة الأولى تقاطع (Δ) و (S) في حالة $t=-1$: نجد $a=0$ و $b=0$ و $c=1$ إذن $(0, 0, 1)$ هو مثلث إحداثيات النقطة الثانية لتقاطع (Δ) و (S) .

التمرين رقم 2 :

$$1- \text{مميز المعادلة المقترحة هو : } \Delta = (-8)^2 - 4(1)(25) = 64 - 100$$

$$= -36 = (6i)^2$$

$$\frac{8-6i}{2} = 4-3i \quad \text{إذن حلا المعادلة المقترحة هما :}$$

$$\frac{8+6i}{2} = 4+3i \quad \text{و}$$

$$2- \vec{BC} \text{ لدينا } (6+6i) \text{ هو لحن المتجهة}$$

$$\vec{AD} = \vec{BC} \quad \text{فإن } T(A) = D$$

إذا كان d هو لحن النقطة D يكون لدينا :

$$d - (4 + 3i) = 6 + 6i$$

$$d = 6 + 6i + 4 + 3i = 10 + 9i \quad \text{ومنه}$$

$$\text{ب- لدينا } \frac{b-a}{d-a} = \frac{4-3i-(4+3i)}{10+9i-(4+3i)} = \frac{-6i}{6+6i}$$

$$= \frac{-i}{1+i} = \frac{-i(1-i)}{2} = -\frac{1}{2}(1+i)$$

$$= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(u_n - 1) = \frac{1}{5}v_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{5}$ وحدها الأول

$$v_0 = u_0 - 1 = 1$$

$$v_n = v_0 q^n = 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{ومنه}$$

ب- لدينا $v_n = u_n - 1$ إذن $u_n = v_n + 1$

أي $0 < \frac{1}{5} < 1$ وبما أن $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$ لأن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

التمرين رقم 4 :

1- بما أن السحب عشوائية وفي آن واحد فإننا سنستعمل الأداة C_n^p

- لتحقيق الحدث A نسحب 3 بيدات بيضاء أو 3 بيدات سوداء

$$P(A) = \frac{C_4^3 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{C_4^3 + 1}{\frac{9!}{3!6!}} \quad \text{وبذلك نجد}$$

$$= 5 \cdot \frac{3 \times 2}{8 \times 7 \times 6} = \frac{5}{84}$$

$$P(A) = \frac{5}{84} \quad \text{أي}$$

- لتحقيق الحدث B نسحب كرة سوداء و كرة بيضاء و كرة خضراء

$$P(B) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot C_2^1}{C_9^3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{\frac{9!}{3!6!}} \quad \text{وبذلك نجد}$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{8 \times 7 \times 6} = \frac{2}{7}$$

2- أ- بما أن هناك 3 بيدات سوداء ونحن نسحب تأنيا 3 بيدات من

الكيس فإنه يمكن الحصول على 0 كرة سوداء أو كرة واحدة بالضبط

سوداء أو كرتين بالضبط سوداوين أو 3 كرات بالضبط سوداء و

$$X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\} \quad \text{بالتالي}$$

ب- الحدث $(X=2)$ هو الحصول بالضبط على كرتين سوداوين

و كرة إما بيضاء أو خضراء .

$$P(X=2) = \frac{\text{Card}(X=2)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{C_3^2 \cdot C_6^1}{C_9^3} \quad \text{إذن}$$

$$= \frac{3 \cdot 6}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{3 \cdot 6^3 \cdot 3 \cdot 2}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{3}{14}$$

$$- \text{لدينا } -\frac{1}{2}(1+i) = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right)$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right) \quad \text{لأن:}$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{4} \quad \text{و} \quad -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{إذن } \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

هو الشكل المثلثي للعدد العقدي $-\frac{1}{2}(1+i)$

$$(\overline{AD}, \overline{AB}) \equiv \arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right)[2\pi] \quad \text{ج- لدينا:}$$

$$(\overline{AD}, \overline{AB}) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi] \quad \text{وحسب السؤال السابق نجد:}$$

التمرين رقم 3 :

1- لنتحقق من أن: $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$\text{لدينا } u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4-5}{5}$$

$$= \frac{1}{5}u_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

2- أ- لنبين بالترجع أن $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

لدينا $u_0 = 2$ و $2 > 1$ إذن $u_0 > 1$

نفترض أن $u_n > 1$ ونبين أن $u_{n+1} > 1$

$$\text{لدينا حسب السؤال السابق } u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$$

وحسب افتراض التراجع $u_n - 1 > 0$

$$\text{إذن } u_{n+1} - 1 > 0 \quad \text{وبالتالي: } u_{n+1} > 1$$

ومنه $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$\text{ب- لدينا: } u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - u_n$$

$$= -\frac{4}{5}u_n + \frac{4}{5} = (u_n - 1)\left(-\frac{4}{5}\right)$$

$$\text{وبما أن } u_n - 1 > 0 \quad \text{فإن } u_{n+1} - u_n < 0$$

$$\text{أي } u_{n+1} < u_n$$

وهذا يعني أن المتتالية (u_n) تناقصية .

ج- المتتالية (u_n) تناقصية ومصفورة بالعدد 1 إذن فهي متقاربة

$$\text{3- أ- لدينا: } v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5} - 1$$

الحدث $(X=I)$ هو الحصول بالضبط على كرة واحدة سوداء وكرتين غير سوداوين .

إذن $P(X=1) = \frac{C_3^1 \cdot C_6^2}{C_9^3}$

وبما أن : $C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \times 1 \times 4!} = 15$

و $C_9^3 = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 6!}$

فإن : $P(X=1) = \frac{3 \cdot 15}{3 \cdot 4 \cdot 7} = \frac{15}{28}$

الحدث $(X=0)$ هو الحدث عدم الحصول على أية كرة سوداء

$P(X=0) = \frac{C_6^3}{C_9^3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{5}{21}$

الحدث $(X=3)$ هو الحدث الحصول بالضبط على 3 كرات سوداء

$P(X=3) = \frac{C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{\frac{9!}{3!6!}} = \frac{3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{84}$

نلخص قانون احتمال X في الجدول التالي :

X	0	1	2	3
P	$\frac{5}{21}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{1}{84}$

التمرين رقم 5 :

I -

1- أ- لدينا لكل x من IR :

$(2x+1)(x-1) = (2x)(x) + (2x)(-1) + (1)(x) + (1)(-1)$

$= 2x^2 - 2x + x - 1 = 2x^2 - x - 1$

ب- لدينا لكل x من $]0, +\infty[$

$g'(x) = (x^2 - x - \ln x)' = 2x - 1 - \frac{1}{x}$

$= \frac{2x^2 - x - 1}{x}$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2x^2 - x - 1$

أي هي إشارة $(2x+1)(x-1)$

جدول إشارة $(2x+1)(x-1)$ على المجال $]0, +\infty[$ هو :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		0	

ومنه نستنتج أن $g'(x) \leq 0$ على المجال $]0, 1]$

أي أن g تناقصية على المجال $]0, 1]$

و $g'(x) \geq 0$ على المجال $[1, +\infty[$ يعني أن g تزايدية على المجال $[1, +\infty[$

2- من خلال ما سبق يمكن تلخيص تغيرات g في الجدول التالي

ومن خلاله نستنتج أنه لكل x من $]0, +\infty[$: $g(x) \geq 0$

(0 قيمة دنيا لـ g على $]0, +\infty[$)

II - 1- أ- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = +\infty$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1 - (\ln x)^2) = -\infty$

وبالتالي المستقيم ذو المعادلة $(x=0)$ مقارب عمودي للمنحنى (C) .

ب- لدينا

$f(x) = x^2 - 1 - (\ln x)^2 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{(\ln x)^2}{x^2}\right)$

$= x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{x^2} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right) = +\infty$

ج- بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ فإن (C) يقبل فرعاً شامخاً بجوار $+\infty$ اتجاهه محور الأرتاب .

2- أ- لدينا لكل x من $]0, +\infty[$

$f'(x) = 2x - 2(\ln x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x^2 - 2 \ln x}{x}$

$= 2 \left(\frac{x^2 - \ln x}{x}\right)$

ب- نضع: $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} u'(x) = \frac{2}{x} \ln x \\ v(x) = x \end{cases}$ إذن:

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx = [x(\ln x)^2]_1^e - 2 \int_1^e \ln x dx = e - 2$$

ج- مساحة حيز المستوى المحصور بين (C) و محور الأفاصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي:

$$\begin{aligned} \int_1^e f(x) dx \cdot 1 \text{ cm}^2 &= \left(\int_1^e (x^2 - 1 - (\ln x)^2) dx \right) \text{ cm}^2 \\ &= \left(\left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^e - (e - 2) \right) \text{ cm}^2 \\ &= \left(\frac{e^3}{3} - e - \frac{1}{3} + 1 - e + 2 \right) \text{ cm}^2 \\ &= \left(\frac{e^3}{3} - 2e - \frac{8}{3} \right) \text{ cm}^2 \\ &= \frac{1}{3} (e^3 - 6e + 8) \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$(\forall x \in [1, e], f(x) > 0)$$

ب- لدينا لكل x من $]0, +\infty[$

$$\frac{g(x)}{x} + 1 = \frac{x^2 - x - \ln x}{x} + 1 = \frac{x^2 - \ln x}{x}$$

$$f'(x) = 2 \left(\frac{g(x)}{x} + 1 \right) \quad \text{ومنه}$$

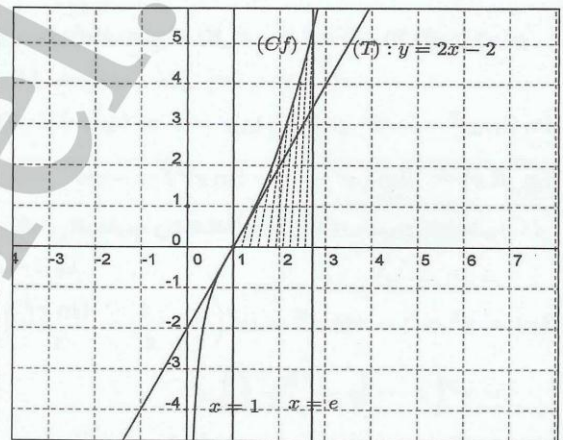
$$]0, +\infty[\text{ لكل } x \text{ } g(x) \geq 0$$

$$]0, +\infty[\text{ لكل } x \text{ } f'(x) \geq 0$$

وهذا يعني أن f تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$

3- أ- معادلة ديكارتية للمستقيم (T) المماس للمنحنى (C) في النقطة $A(1, 0)$ هي:

$$g = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 0 = 2x - 2$$



4- أ- الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ (كمجموع و جداء

دوال قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$)

ولدينا لكل x من $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} H'(x) &= (x)'(\ln x - 1) + (x)(\ln x - 1)' \\ &= \ln x - 1 + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x \end{aligned}$$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة $h: x \mapsto \ln x$ على $]0, +\infty[$

- لدينا:

$$\begin{aligned} \int_1^e \ln x dx &= [x(\ln x - 1)]_1^e \\ &= e(\ln e - 1) - (1)(\ln(1) - 1) = 1 \end{aligned}$$