

ج- ليكن e العنصر المحايد للقانون التبادلي $*$ في I :

إذن : $(\forall x \in I) x * e = x$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \frac{xe}{xe + (1-x)(1-e)} = x \text{ و } x \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) \frac{e}{xe + (1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) e = xe + (1-x)(1-e)$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) e(1-x) - (1-x)(1-e) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \in I) (1-x)(2e-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e-1 = 0 \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow e = \frac{1}{2}$$

وبالتالي : $\frac{1}{2}$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في I .

2- بين أن $(I, *)$ زمرة تبادلية.

ليكن x من I و x' مماثله بالنسبة للقانون $*$:

لدينا $x * x' = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{xx'}{xx' + (1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow xx' = \frac{1}{2}xx' + \frac{1}{2}(1-x)(1-x')$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}xx' = \frac{1}{2}(1-x)(1-x')$$

$$\Leftrightarrow xx' = 1 - x' - x - xx'$$

$$\Leftrightarrow x' = (1-x) \in I$$

إذن كل عنصر x من I يقبل ماثلا $1-x$ بالنسبة للقانون $*$ في I .

لدينا : $*$ قانون تركيب داخلي تجميعي وتبادلي في I .

إذن : $*$ يقبل عنصرا محايدا $\frac{1}{2}$ في I .

- كل عنصر من I يقبل ماثلا بالنسبة للقانون $*$ في I .

بالتالي : $(I, *)$ زمرة تبادلية.

(2) - أ- لنبين أن : H زمرة جزئية للزمرة $(IR_+, \times)$

لدينا $H \subset R_+^*$, و $H \neq \emptyset$ (لأن : $2 \in H$)

ليكن x و y من H :

إذن : $\exists (n; m) \in Z^2 : x = 2^n \quad y = 2^m$

$$\Rightarrow \exists n - m \in Z : \frac{x}{y} = 2^{n-m}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} \in H$$

ومنه المطلوب

Achamel.info

التمرين الأول :

(1) لنبين أن $*$ قانون تركيب داخلي في $I =]0, 1[$.

لدينا : $\forall (x; y) \in I^2 : (1-x)(1-y) > 0 \quad xy > 0$

$$\Rightarrow \forall (x; y) \in I^2 : xy + (1-x)(1-y) > xy$$

$$\Rightarrow \forall (x; y) \in I^2 : 0 < \frac{1}{xy + (1-x)(1-y)} < \frac{1}{xy}$$

$$\Rightarrow \forall (x; y) \in I^2 : 0 < \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Rightarrow \forall (x; y) \in I^2 : 0 < x * y < 1$$

$$\Rightarrow \forall (x; y) \in I^2 : x * y \in I$$

ب- لنبين أن $*$ تبادلي وتجميعي :

لدينا :

$$\Rightarrow \forall (x; y) \in I^2 : x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

$$= \frac{yx}{yx + (1-y)(1-x)}$$

$$= y * x$$

- لنبين أن $*$ قانوني تجميعي :

$$\forall (x; y; z) \in I^3 : (x * y) * z = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)} * z$$

$$= \frac{\frac{xyz}{xy + (1-x)(1-y)}}{\frac{xyz}{xy + (1-x)(1-y)} + \left(1 - \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}\right)(1-z)}$$

$$= \frac{xyz}{xyz + (xy + (1-x)(1-y) - xy)(1-z)}$$

$$= \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$\forall (x; y; z) \in I^3 : x * (y * z) = (y * z) * x$$

$$= \frac{yzx}{yzx + (1-y)(1-z)(1-x)}$$

$$= \frac{xyz}{xyz + (1-x)(1-y)(1-z)}$$

$$= (x * y) * z$$

التمرين الثاني : 1) أ- لنتحقق أن $10^{x+1} \equiv 1[19]$ نعلم أن x عدد حقيقي يحقق : $10^x \equiv 2[19]$ ومنه : $10^x \cdot 10 \equiv 20[19]$ إذن : $10^{x+1} \equiv 20[19]$ أي : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ ومنه المطلوب . ب- لنبين أن : $10^{18} \equiv 1[19]$ لدينا : 19 عدد أولي حسب مبرهنة - فيرما - $10^{19} \equiv 10[19]$ بما أن : $10 \wedge 19 = 1$ فإن : $10^{18} \equiv 1[19]$ 2- أ- لنبين أن : $10^d \equiv 1[19]$ بما أن : $d = 18 \wedge (x+1)$ فإنه يوجد عددين u و v من Z بحيث : $d = 18u + (x+1)v$ لدينا : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1[19]$ أي : $10^{(x+1)v} \equiv 1[19]$ وبالتالي : $10^{18u + (x+1)v} \equiv 1[19]$ ب- لنبين أن $d = 18$: لدينا d يقسم العدد 18 إذن : $d \in \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ ولدينا : $10^1 \equiv 10[19]$ و $10^2 \equiv 5[19]$ و $10^3 \equiv 12[19]$ و $10^6 \equiv 11[19]$ و $10^9 \equiv 11[19]$ بما أن : $10^d \equiv 1[19]$ فإن : $d = 18$ ج- لنستنتج أن $x \equiv 17[18]$ لدينا d يقسم $x+1$ أي : 18 يقسم $x+1$	ب- لنبين أن φ تشاكل من $(H, \times)$ نحو $(I, *)$ ليكن x و y من H إذن : $\exists (n, m) \in Z^2 / x = 2^n$ و $y = 2^m$ لدينا : $\varphi(x \times y)$ $= \varphi(2^n \times 2^m) = \varphi(2^{n+m}) = \frac{1}{1 + 2^{n+m}}$ ومن جهة أخرى لدينا : $\varphi(x) * \varphi(y) = \frac{1}{1 + 2^n} * \frac{1}{1 + 2^m} = \frac{1}{(1 + 2^n)(1 + 2^m)}$ $= \frac{1}{(1 + 2^n)(1 + 2^m) + \left(1 - \frac{1}{1 + 2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{1 + 2^m}\right)}$ $= \frac{1}{1 + (1 + 2^n)(1 + 2^m)\left(\frac{2^n}{1 + 2^n}\right)\left(\frac{2^m}{1 + 2^m}\right)}$ $= \frac{1}{1 + 2^{n+m}}$ أي : $\forall (x, y) \in H^2 ; \varphi(x \times y) = \varphi(x) * \varphi(y)$ ومنه المطلوب . ج- لنستنتج أن K زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$: بما أن φ تشاكل من $(H, \times)$ نحو $(I, *)$ فإن $\varphi(H)$ زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$. من جهة أخرى لدينا : $x \in K \Leftrightarrow \exists n \in Z : x = \frac{1}{1 + 2^n}$ $\Leftrightarrow \exists 2^n \in H : x = \varphi(2^n)$ $\Leftrightarrow x \in \varphi(H)$ $K = \varphi(H)$ وبالتالي : K زمرة جزئية للزمرة $(I, *)$
--	--

$$\begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases} \text{ أي :}$$

إذن : $(x; y) = (3; -2)$ و $(x; y) = (-3; 2)$

الجذران المربعان للعدد $5 - 12i$ هما : $3 - 2i$ و $-3 + 2i$

ب- حل المعادلة (E) في $\mathbb{C}$

$$(E) \Leftrightarrow (z + 2i)(z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z + 2i = 0 \text{ أو } z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i = 0$$

ليكن Δ مميز ثلاثية الحدود : $z^2 - (1 + 4i)z - 5 + 5i$

$$\Delta = (1 + 4i)^2 - 4(-5 + 5i)$$

$$= 5 - 12i$$

$$= (3 - 2i)^2$$

وبالتالي :

$$(E) \Leftrightarrow z = -2i \text{ أو } z = \frac{1 + 4i + 3 - 2i}{2} \text{ أو } z = \frac{1 + 4i - 3 + 2i}{2}$$

$$\Leftrightarrow z = -2i \text{ أو } z = 2 + i \text{ أو } z = -1 + 3i$$

$$S = \{-2i; 2 + i; -1 + 3i\}$$

الجزء الثاني :

1- لنبين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C

$$\frac{a - c}{b - c} = \frac{1 + 3i - 2i}{-2i - 2 - i} = \frac{-3 + 2i}{-2 - 3i}$$

$$= \frac{3 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(3 - 2i)i}{2i - 3} = -i$$

$$\frac{CA}{CB} = \left| \frac{a - c}{b - c} \right| = \left| \frac{a - c}{b - c} \right| = |-i| = 1$$

$$(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) \equiv \arg\left(\frac{a - c}{b - c}\right)[2\pi] \equiv \arg(-i)[2\pi]$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

ومن هنا المطلوب . $(\overrightarrow{CB} \perp \overrightarrow{CA})$ و $CB = CA$

2- أ- صيغة للدوران R_I :

ليكن z' لحق النقطة M_I صورة النقطة M بالدوران R_I .

$$z' - b = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - b) \text{ لدينا :}$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x + 1 = 18k$$

$$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : x = -1 + 18k$$

$$\Rightarrow x \equiv -1[18]$$

$$\Rightarrow x \equiv 17[18]$$

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

$$p(z) = z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) \text{ نضع :}$$

$$p(-2i) = (-2i)^3 - (1 + 2i)(-2i)^2 + 3(1 + i)(-2i) - 10(1 + i)$$

$$= 8i + 4(1 + 2i) - 6i(1 + i) - 10(1 + i)$$

$$= 8i + 4 + 8i - 6i - 6 - 10 - 10i$$

$$= 0$$

إذن $(-2i)$ حل للمعادلة (E) .

2- لنحدد α و β بحيث :

$$p(z) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

لدينا

$$p(z) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + 2iz^2 + 2i\alpha z + 2i\beta$$

$$= z^3 + (\alpha + 2i)z^2 + (\beta + 2i\alpha)z + 2i\beta$$

$$\times \left(\frac{-i}{2}\right) \begin{cases} 2i\beta = -10(1 + i) \\ \alpha + 2i = -(1 + 2i) \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\begin{cases} \beta = 5i(1 + i) \\ \alpha = -1 - 4i \end{cases} \text{ إذن :}$$

$$\alpha = -1 - 4i \quad \beta = 5i(1 + i) \text{ وبالتالي :}$$

3- أ- لنحدد الجذرين المربعين للعدد $5 - 12i$:

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i \text{ نحدد } x \text{ و } y \text{ من } IR \text{ بحيث :}$$

$$(x + iy)^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = 5 - 12i$$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 5 \quad xy = -6$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$|x + iy|^2 = |5 - 12i| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13$$

إذن الزوج $(x; y)$ يحقق النظام :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 5 \\ x^2 + y^2 = 13 \\ xy = -6 \end{cases}$$

ب- لنبين أن f تقابل :

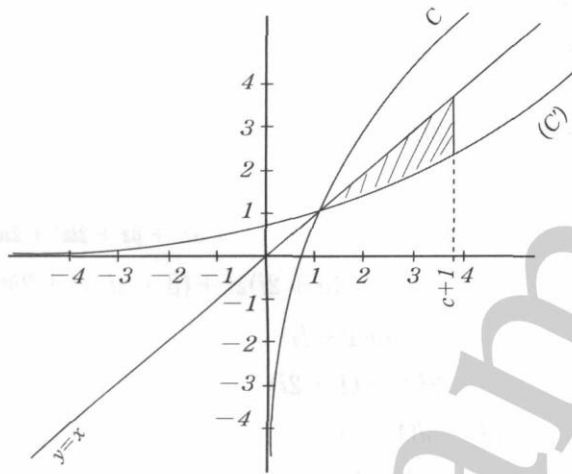
الدالة f متصلة و تزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$
 إذن فهي تقابل من $]0, +\infty[$ نحو IR
 جدول تغيرات الدالة f^{-1} :

x	$-\infty$	$+\infty$
f^{-1}	0	$+\infty$

3- إنشاء (C) و (C') في م.م.م :

$$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$$

$$f(e) = e + \ln e = e + 1$$



4- أ- حساب التكامل : $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$

$$t = f^{-1}(x) \quad \text{نضع :}$$

$$f(t) = x \quad \text{إذن}$$

$$f(t) dx = dx \quad \text{أي :}$$

$$\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx = \int_1^e t f'(x) dt \quad \text{نستعمل مكاملة الأجزاء}$$

$$= [t f(t)]_1^e - \int_1^e f(t) dt$$

$$= e(e+1) - 1 - \left[\frac{t^2}{2} + t \ln t - t \right]_1^e$$

$$= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z + 2i) - 2i$$

$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i$$

ومنه المطلوب .

ب- لنحدد z_2 لحق M_2 بدلالة z :

$$z_2 + 1 - 3i = e^{-i\frac{2\pi}{3}} (z + 1 - 3i) \quad \text{لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z + 1 - 3i) - 1 + 3i$$

$$\Leftrightarrow z_2 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - (1 - 3i) \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right)$$

ج- لنستنتج أن I منتصف القطعة $[M_1 M_2]$ ثابتة .

ليكن z_I لحق النقطة M_I

$$2z_I = z_1 + z_2 \quad \text{يعني :} \quad [M_1 M_2] \text{ منتصف القطعة}$$

$$= \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) z - \sqrt{3} - i + \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) (z + 1 - 3i) - 1 + 3i$$

$$= -\sqrt{3} - i - (1 - 3i) \left(\frac{3 + i\sqrt{3}}{2} \right)$$

إذن: لحق النقطة I ثابت وبالتالي النقطة I ثابتة .

التمرين الرابع :

لدينا : $f(x) = x + \ln x \quad x > 0$

1- حساب النهايات :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x} \right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

2- أ- جدول تغيرات الدالة :

لدينا :

$$(\forall x \in]0; +\infty[): f'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x} > 0$$

إذن f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$ و جدول تغيراتها هو :

	0	$+\infty$
$f'(x)$	$ $	$+$
f	$ $	$+\infty$

$\Rightarrow (\forall n \in N^*): f(n) \geq f(x_n)$
 لدينا : $(\forall n \in N^*): f(n) \geq f(x_n)$
 بما أن f دالة تزايدية فإن :
 $(\forall n \in N^*): x \geq x_n$
 ب- لنبين أن : $n - \ln(n) \leq x_n$: لدينا :
 $(\forall n \in N^*): 0 < x_n \leq n$
 $\Rightarrow (\forall n \in N^*): \ln(x_n) \leq \ln(n)$
 $\Rightarrow (\forall n \in N^*): x_n + \ln(x_n) \leq x_n + \ln(n)$
 $\Rightarrow (\forall n \in N^*): f(x_n) \leq x_n + \ln(n)$
 $\Rightarrow (\forall n \in N^*): n \leq x_n + \ln(n)$
 $\Rightarrow (\forall n \in N^*): n - \ln(n) \leq x_n$
 ج- حساب النهايتين : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)}$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n}$
 لدينا : $(\forall n \in IN^*): n - \ln(n) \leq x_n \leq n$
 إذن : $(\forall n \in IN^*): \frac{-\ln(n)}{n} \leq \frac{x_n - n}{n} \leq 0$
 بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(n)}{n} = 0$
 فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$
 لدينا : $(\forall n \in IN^*): \frac{x_n}{n - \ln(n)} = \frac{x_n - n}{n - \ln(n)} + \frac{n}{n - \ln(n)}$
 $= \frac{x_n - n}{n} \times \frac{n}{n - \ln(n)} + \frac{n}{n - \ln(n)}$
 بما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n - \ln(n)} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - n}{n} = 0$
 فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n - \ln(n)} = 0 \times 1 + 1 = 1$
 التمرين الخامس :
 $x \in IR \quad f(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$
 1- الدالة f_n متصلة على المجال $]0, 1[$ لأنها حدودية
 ليكن x من $]0, 1[$
 $f'_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} > 0$

ب- حساب A مساحة الحيز المحصور بين (C') والمستقيمات :
 $y=x$ و $x=e+1$ و $x=1$
 $A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)| dx = \int_1^{e+1} (x - f^{-1}(x)) dx$
 $= \int_1^{e+1} x dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$
 $= \left(\frac{e^2}{2} + e\right) - \left(\frac{e^2}{2} + e - \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$
 5- أ- لنبين أن (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n :
 لدينا : $(E_n) \Leftrightarrow f(x) = n$
 الدالة f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو IR إذن المعادلة (E_n)
 تقبل حلا وحيدا x_n . $\forall n \in IN^*$
 ب- قيمة x_1 :
 $(E_1) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = 1$
 إذن : $x_1 = 1$
 * لنبين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$
 ليكن : $A \in IR_+^*$
 لدينا : $f(x_n) = n$
 إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$
 حسب تعريف هذه النهاية فإنه
 $(\forall B \in IR_+^*)(\exists N \in IN^*): n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq B$
 نأخذ : $B = f(A+1) > 0$
 $f(A+1) > f(1) = 1$
 f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$
 إذن : $(\exists N \in IN^*): n \geq N \Rightarrow f(x_n) \geq f(A+1)$
 $\Rightarrow x_n \geq A+1$
 $\Rightarrow x_n \geq A$
 وهذا يعني أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$
 6- أ- لنبين أن $f(x_n) \leq f(n)$:
 لدينا : $(\forall n \in N^*): \ln(n) \geq 0$
 $\Rightarrow (\forall n \in N^*): n + \ln(n) \geq n$

ب- لدينا :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}) dt = \int_0^{\alpha_n} \frac{dt}{1-t} - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow \left[t + \frac{t^2}{2} + \dots + \frac{t^n}{n} \right]_0^{\alpha_n} = [-\ln(1-t)]_0^{\alpha_n} - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

4- لنبين أن : $1 + \ln(1-\alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow f_n(\alpha_n) + 1 = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t}$$

$$\Rightarrow 1 + \ln(1-\alpha_n) = \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \quad (f_n(\alpha_n) = 0)$$

ومنه المطلوب .

ب- لنبين أن :

$$(\forall n \geq 2) \quad 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$$

ليكن : $n \geq 2$

لدينا : $0 \leq t \leq \alpha_n \Rightarrow -1 \leq t-1 \leq \alpha_n-1$

$$\Rightarrow 1 - \alpha_n \leq 1 - t \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \alpha_n \leq 1 - t \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-\alpha_n}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \int_0^{\alpha_n} t^n dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^{\alpha_n}$$

إذن الدالة f_n تزايدية قطعاً على المجال $]0, 1[$

من جهة أخرى لدينا :

$$f_n(0) = -1 < 0$$

$$f_n(1) = -1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} > 0$$

$$f_n(0) \times f_n(1) < 0$$

حسب مبرهنة القيم الوسطية فإنه يوجد عدد وحيد α_n من المجال $]0, 1[$ بحيث : $f_n(\alpha_n) = 0$

2- لنبين أن : $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعاً :

لدينا :

$$(\forall x \in]0, 1[) :$$

$$f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

أي :

$$(\forall x \in]0, 1[) : f_{n+1}(x) > f_n(x)$$

بما أنه :

$$(\forall n \geq 2) : \alpha_{n+1} \in]0, 1[$$

فإن :

$$(\forall n \geq 2) : f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 2) : f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$$

$$\Rightarrow (\forall n \geq 2) : \alpha_n > \alpha_{n+1}$$

لاحظ $(f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0 = f_n(\alpha_n))$ ومنه المطلوب .

- لنستنتج أن $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ متقاربة :

المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية ومصغرة بالعدد 0 إذن فهي متقاربة .

3- أ- لنتحقق أن :

$$1 + t + t^2 \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}, (t \neq 1)$$

المتتالية : $t^n \rightarrow n$ هندسية أساسها $t (t \neq 1)$ إذن :

$$1 + t + t^2 \dots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{1-\alpha_n} \times \frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1} \quad (\alpha_n^{n+1} < 1)$$

$$\Rightarrow 0 < \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)}$$

ج- لنستنتج أن: $\ell = 1 - e^{-1}$

$$0 < \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)} \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\alpha_n)(n+1)} = 0 \quad \text{بما أن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n dt}{1-t} = 0 \quad \text{فإن:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \ln(1 - \alpha_n) = 0 \quad \text{أي:}$$

من جهة أخرى لدينا:

$$(\forall n \geq 2): \alpha_n \in]0; 1[\Rightarrow \ell \in [0; 1]$$

المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية قطعاً إذن: $\ell \leq \alpha_2 < 1$

أي: $\ell \in [0; 1[$

الدالة: $x \rightarrow 1 + \ln(1 + x)$ متصلة على المجال $[0; 1[$

أي متصلة في ℓ .

وبالتالي:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \ln(1 - \alpha_n) = 1 + \ln(1 - \ell)$$

$$\Rightarrow 0 = 1 + \ln(1 - \ell)$$

$$\Rightarrow -1 = \ln(1 - \ell)$$

$$\Rightarrow e^{-1} = 1 - \ell$$

$$\Rightarrow \ell = 1 - e^{-1}$$

ومنه المطلوب.