

ومنه $10^{30k+2} \equiv 100[31]$ أي $10^{30k+2} \equiv 10^2[31]$ وحيث أن $100 = 31 \times 3 + 7$ فإن $10^{30k+2} \equiv 7[31]$ ومنه المطلوب .

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3a_n + 7 = 10^{n+1} \quad \text{4- لدينا :}$$

$$3a_n = 10^{n+1} - 7 \quad \text{أي :}$$

$$n \in \mathbb{N}^* \quad \text{بوضع :}$$

$$n \in \mathbb{N} \quad n = 30k + 1$$

$$\text{نحصل على :}$$

$$3a_{30k+1} = 10^{30k+2} - 7$$

$$3a_{30k+1} \equiv 0[31] \quad \text{إذن :}$$

$$\text{وحيث } 31 \text{ عدد أولي و } 3 \wedge 31 = 1 \text{ و } 31/3a_{30k+1}$$

$$31/a_{30k+1} \quad \text{فإن حسب مبرهنة كوص (Gauss) :}$$

$$5- \text{ليكن } n \in \mathbb{N}^* \text{ بحيث } n \equiv 1[30]$$

$$\exists k \in \mathbb{N} / n = 30k + 1 \quad \text{يعني :}$$

$$\text{نفترض أن المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ تقبل حلول في } \mathbb{Z}^2$$

$$\text{حسب مبرهنة بوزو (BEZOUT)}$$

$$a_{10k+1} \wedge 31 = 1 \quad \text{أي } a_n \wedge 31 = 1$$

$$\text{وحسب نتيجة السؤال (4)}$$

$$\text{لدينا } 31/a_{30k+1} \text{ وهذا تناقض ومنه افتراضنا خاطئ}$$

$$\text{إذن المعادلة } a_n x + 31y = 1 \text{ لا تقبل حلولاً في } \mathbb{Z}^2$$

التمرين الثاني :

$$\begin{matrix} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad M(a,b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix} \quad \text{نضع}$$

$$E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$1- \text{لنبين أن } E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_2(\mathbb{R}), +)$$

$$M(0,0) \in E \text{ لأن } E \neq \emptyset \text{ و } E \subset M_2(\mathbb{R})$$

$$M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0-0 \\ 0 & 0+0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ليكن } M(a,b) \in E \text{ و } M(a',b') \in E$$

Achamel.info

التمرين الأول :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad a_n = \frac{333 \dots 31}{n \text{ مرة}}$$

$$1- \text{لنتحقق أن : } a_1 \text{ و } a_2 \text{ أوليان}$$

$$* \text{ لدينا : } a_1 = 31 \text{ و } 5 < \sqrt{31} < 6$$

$$\text{الأعداد الأولية الأصغر أو تساوي 5 هي 2, 3, 5}$$

$$\text{و العدد 31 لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد}$$

$$\text{إذن } a_1 \text{ عدد أولي}$$

$$* \text{ لدينا : } a_2 = 331 \text{ و } 18 < \sqrt{131} < 19$$

$$\text{الأعداد الأولية الأصغر أو تساوي 18 هي 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17}$$

$$\text{و العدد 331 لا يقبل القسمة على أي من هذه الأعداد}$$

$$\text{إذن } a_2 \text{ عدد أولي}$$

$$2- \text{إثبات المتساوية :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad 3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$\text{لدينا :}$$

$$a_n = \frac{333 \dots 31}{n \text{ مرة}}$$

$$a_n = \frac{333 \dots 30}{n \text{ مرة}} + 1$$

$$= \frac{3111 \dots 10}{n \text{ مرة}} + 1$$

$$= 3(10 + 10^2 + \dots + 10^n) + 1$$

$$= 3 \times 10 \left(\frac{1 - 10^{n+1}}{1 - 10} \right) + 1$$

$$= \frac{1}{3}(10^{n+1} - 10) + 1$$

$$3a_n = 10^{n+1} - 10 + 3$$

$$3a_n = 10^{n+1} - 7$$

$$3a_n + 7 = 10^{n+1}$$

$$\text{ومنه المطلوب .}$$

$$3- \text{لنبين أن } 10^{30k+2} \equiv 7[31] \quad \forall k \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{لدينا } 31 \text{ عدد أولي و } 0 < 10 < 31$$

$$\text{إذن } 31 \wedge 10 = 1$$

$$\text{ومنه حسب مبرهنة فيرما (FERMAT) } 10^{30} \equiv 1[31]$$

لدينا : $\mathcal{C}(a + bi) * \mathcal{C}(a' + b'i)$

$$= M(a, b) \times N \times M(a', b')$$

$$M(a, b) \times N = \begin{pmatrix} a & a - b \\ b & a + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$M(a, b) \times N \times M(a', b') =$$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & a' - b' \\ b' & a' + b' \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} aa' - bb' & a(a' - b') - b(a' + b') \\ a'b - ab' & b(a' - b') + a(a' + b') \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} aa' - bb' & (aa' - bb') - (a'b + ab') \\ a'b - ab' & (aa' - bb') + (a'b + ab') \end{pmatrix} =$$

$$M(aa' - bb', a'b + ab')$$

ومنه :

$$\mathcal{C}[(a + bi) \times (a' + b'i)]$$

$$= \mathcal{C}[(a + bi) * (a' + b'i)]$$

ب- $E^* = E - \{0\}$

لتكن M من E^* يعني :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^{*2} / M(a, b) = \mathcal{C}(a + bi)$$

إذن التطبيق $\mathcal{C}$ شمولي من $\mathbb{C}^*$ نحو E^*

$$\forall M \in E^* \exists (a + bi) \in \mathbb{C}^* / \mathcal{C}(a + bi) = M(a, b) = M$$

ومنه : $\mathcal{C}(\mathbb{C}^*) = E^*$

ج- لدينا $\mathcal{C}$ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ إلى $(M_2(\mathbb{R}), *)$

وحيث أن : $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية فإن $(\mathcal{C}(\mathbb{C}^*), *)$ زمرة تبادلية

ولدينا $E^* = \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ إذن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية .

4- ليكن $A \in E$ $B \in E$ $C \in E$

لدينا : $A * (B + C) = A \times N \times (B + C)$

$$= A \times N \times B + A \times N \times C$$

$$A * (B + C) = A * B + A * C$$

ومنه المطلوب .

لدينا : $M(a, b) - M'(a', b')$

$$= \begin{pmatrix} a & a - b \\ b & a + b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a' & a' - b' \\ b' & a' + b' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a - a' & (a - a') - (b - b') \\ b - b' & (a - a') + (b - b') \end{pmatrix}$$

$$= M(a - a', b - b') \in E$$

و $[M(a - b) - M'(a', b')] \in E$

ومنه $(E, +)$ زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}), +)$

2- $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لدينا : $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لدينا : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 - 0 \\ 0 & 1 + 0 \end{pmatrix} = M(1, 0)$

و $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in E \Leftrightarrow \begin{cases} \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 / \\ a = 1 \text{ و } b = 0 \\ a - b = 2 \\ \text{و } a + b = 1 \end{cases}$

وهذا لا يمكن.

إذن : $J^2 \notin E$

ومنه J جزء غير مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$

3- أ- $A \in M_2(\mathbb{R})$ $B \in M_2(\mathbb{R})$

$$A * B = A \times N \times B / N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

لنبين أن التطبيق

$$\mathcal{C} = \mathbb{C}^* \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$$

$$a + bi \longrightarrow M(a, b)$$

تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ إلى $(M_2(\mathbb{R}), *)$

$$\mathcal{C}[(a + bi) \times (a' + b'i)]$$

$$= \mathcal{C}[aa' - bb' + (ab' + a'b)i]$$

$$= M(aa' - bb', ab' + a'b)$$

$$\mathcal{C}(a + bi) = M(a, b)$$

$$\mathcal{C}(a + bi) = M(a', b')$$

$$= \frac{-2i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-2i}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= -i \in IR$$

إذن : $\arg\left(\frac{Z_{T_2} - Z_{T_1}}{Z_A - Z_O}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

إذن : $(OA) \perp (T_1 T_2)$

ب- K منتصف $[T_1 T_2]$

إذن : $Z_K = \frac{Z_{T_1} + Z_{T_2}}{2}$

$$= \frac{e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})} + e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}}{2} = \frac{e^{i\theta} (e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{\pi}{4}})}{2}$$

$$= \frac{e^{i\theta} \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{i\theta}$$

ومن هنا : $\frac{Z_K - Z_O}{Z_A - Z_O} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}}{\sqrt{2} e^{i\theta}} = \frac{1}{2} \in IR$

إذن النقط O و A و K مستقيمية ومنه المطلوب .

ج- لدينا $K \in (OA)$ و K منتصف $[T_1 T_2]$

و $(T_1 T_2) \perp (OA)$

إذن (OA) هو واسط القطعة $[T_1 T_2]$

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و $\frac{\pi}{2}$ قياسا لزاويته .

أ- الصيغة العقدية للدوران r هي

$$Z' = e^{i\frac{\pi}{2}} Z + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) Z_{T_1}$$

$$Z' = iZ + (1 - i)e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

ب- لدينا : $r(I) = B$

$$\Leftrightarrow Z_B = iZ_I + (1 - i)e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$\Leftrightarrow Z_B = i + (1 - i)e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$\Leftrightarrow b = i + (1 - i)e^{i\theta} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow b = i + (1 - i)e^{i\theta} \cdot (1 + i) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = i + (1 - i)(1 + i) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta}$$

5- الاستنتاج :

لدينا E زمرة جزئية للزمرة التبادلية $(M_2(IR), +)$

إذن $(E, +)$ زمرة تبادلية و $(E^*, *)$ زمرة تبادلية

و * قانون تبادلي

و القانون * توزيعي بالنسبة لـ E

إذن $(E, +, *)$ جسم تبادلي ومنه المطلوب .

التمرين الثالث :

لدينا $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ و $\theta \neq \frac{\pi}{4}$

1- لدينا المعادلة $(E): Z^2 - \sqrt{2} e^{i\theta} Z + e^{i2\theta} = 0$

أ- لدينا : $\Delta = (\sqrt{2} e^{i\theta})^2 - 4(e^{i2\theta})$

أي : $= 2e^{i2\theta} - 4e^{i2\theta}$

أي : $= -2e^{i2\theta} = 2i^2 e^{i2\theta}$

ومن هنا : $\Delta = (\sqrt{2} i e^{i\theta})^2$

ومن هنا المطلوب .

ب- $Z_1 = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} + \sqrt{2} i e^{i\theta}}{2}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} (1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} \cdot \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_1 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2} e^{i\theta} - \sqrt{2} i e^{i\theta}}{2}$$

$$Z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} (1 - i) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} \cdot \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

$$Z_2 = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})}$$

2- لدينا : $T_1(e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})})$ $J(-1)$ $I(1)$

$$A(\sqrt{2} e^{i\theta}) \text{ و } T_1(e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})})$$

لتبين أن $(OA) \perp (T_1 T_2)$

لدينا : $\frac{Z_{T_1} - Z_{T_2}}{Z_A - Z_O} = \frac{e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - e^{i(\theta + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2} e^{i\theta}}$

$$= \frac{e^{i\theta} (e^{-i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{4}})}{\sqrt{2} e^{i\theta}}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + x^2 = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0) \quad \text{إذن}$$

إذن f متصلة على اليمين في 0

وبالتالي f متصلة على $[0, +\infty[$

ب- إشارة $f(x)$ على $[0, +\infty[$ هي إشارة $-\ln x$:

$$\forall x > 0 \quad 1 + x^2 > 0$$

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	0	+	-

ومنه :

$$0 < x \leq 1 \Leftrightarrow -\ln x \geq 0$$

$$x \geq 1 \Leftrightarrow -\ln x \leq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad -1 \quad 2$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{x}\right) &= \frac{-\frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{\frac{1}{x} \ln x}{\frac{x^2 + 1}{x^2}} \\ &= \frac{x \ln x}{x^2 + 1} = -f(x) \end{aligned}$$

ومنه المطلوب .

ب- الدالتان : $x \rightarrow 1 + x^2$ و $x \rightarrow -x \ln x$

قابلتان للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وحيث أن

$$\forall x > 0 \quad 1 + x^2 \neq 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ج- الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ وخصوصا على

المجال $]0, 1[$

$$f(0) = f(1) = 0 \quad \text{ولدينا :}$$

ومنه حسب مبرهنة رول : $\exists \alpha \in]0, 1[\quad f'(\alpha) = 0$

$$\forall x > 0 \quad f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \text{د- لدينا :}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' f'\left(\frac{1}{x}\right) = -f'(x) \quad \text{ومنه :}$$

$$-\frac{1}{x^2} f'\left(\frac{1}{x}\right) = -f'(x) \quad \text{ومنه :}$$

$$\Leftrightarrow b = i + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{i\theta}$$

$$\boxed{b = \sqrt{2} \cdot e^{i\theta} + i}$$

أي :

ومنه المطلوب .

ج- لدينا :

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_I - Z_J} = \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + i - \sqrt{2}e^{i\theta}}{1 - (-1)} = \frac{i}{2}$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_I - Z_J} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (IJ)$$

4- لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $(\vec{v})$ صيغتها العقدية هي :

$$Z' = Z + Z \cdot \vec{v}$$

$$Z' = Z = i$$

$$Z_C = Z_A - i$$

$$\boxed{Z_C = \sqrt{2}e^{i\theta} - i}$$

- 5

$$\begin{aligned} \frac{Z_B + Z_C}{2} &= \frac{\sqrt{2}e^{i\theta} + i + \sqrt{2}e^{i\theta} - i}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}e^{i\theta}}{2} = \sqrt{2}e^{i\theta} = Z_A \end{aligned}$$

إذن A منتصف القطعة $[BC]$

ومنه المطلوب .

التمرين الرابع :

I- لدينا f دالة معرفة على $]0, +\infty[$ ب :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{-x \ln x}{1 + x^2} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

1- أ- الدالة $x \rightarrow -x \ln x$ معرفة ومتصلة على المجال

$]0, +\infty[$

الدالة $x \rightarrow 1 + x^2$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$ وخصوصا

على المجال $]0, +\infty[$

$$\forall x > 0 \quad 1 + x^2 \neq 0 \quad \text{ولدينا}$$

إذن الدالة f متصلة على المجال $]0, +\infty[$ خارج الدالتين

متصلتين .

$$-\frac{\ln^2 x}{2} \leq -\int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt \leq -\frac{\ln^2 x}{4} \quad \text{ومنه :}$$

$$F(1) - \frac{\ln^2 x}{2} \leq F(1) - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt \leq F(1) - \frac{\ln^2 x}{4} \quad \text{ومنه :}$$

$$F(1) - \frac{\ln^2 x}{2} \leq F(x) \leq F(1) - \frac{\ln^2 x}{4} \quad \text{أي :}$$

ومنه المطلوب .

$$\forall x \geq 1 \quad F(x) \leq F(1) - \frac{\ln^2 x}{4} \quad \text{ج- لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln^2 x}{4} = -\infty \quad \text{ولدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty \quad \text{إذن :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$F(1) - \frac{\ln^2 x}{2} \leq F(x) \leq F(1) - \frac{\ln^2 x}{4} \quad \text{ولدينا :}$$

$$\frac{F(1)}{x} - \frac{\ln^2 x}{2x} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{F(1)}{x} - \frac{\ln^2 x}{4x} \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{\ln^2 x}{4x} = 0 \quad \text{لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(1)}{x} - \frac{\ln^2 x}{2x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \quad \text{ومنه :}$$

ومنه المنحنى (C) يقبل فرعاً شامياً اتجاهه محور الأفاسيل بجوار $+\infty$

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \quad \text{2-أ- لدينا :}$$

الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$

إذن f متصلة على كل مجال من النوع $[0, x]$ $x \geq 0$

إذن F قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$ ولدينا

$$\forall x \geq 0 \quad F'(x) = f(x)$$

ب- لدينا إشارة $F'(x)$ هي إشارة $f(x)$

ومنه جدول تغيرات الدالة F .

x	0	1	$+\infty$
$F'(x)$	0	+	-
$F(x)$	0	$F(1)$	$-\infty$

$$f'\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f'(x) \quad \text{ومنه :}$$

$$f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2 f'(\alpha) \quad \text{ومنه :}$$

$$f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0 \quad \text{فإن } f'(\alpha) = 0$$

ومنه المطلوب.

II- لتكن F الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بـ :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

$$\forall t \in [1, +\infty[\quad \text{1-أ- لدينا :}$$

$$* \frac{t^2}{1+t^2} - \frac{1}{2} = \frac{2t^2 - 1 - t^2}{2(1+t^2)} = \frac{t^2 - 1}{2(1+t^2)} \geq 0$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} \geq \frac{1}{2} \quad \text{إذن :}$$

$$* \frac{t^2}{1+t^2} - 1 = \frac{t^2 - 1 - t^2}{1+t^2} = \frac{-1}{1+t^2} \leq 0$$

$$\frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \text{إذن :}$$

$$\forall t \in [1, +\infty[\quad , \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$t \longrightarrow \frac{t^2}{1+t^2} \quad \text{ب- لدينا الدالة}$$

متصلة على IR خصوصاً على المجال $[1, +\infty[$

والدالة $t \longrightarrow \frac{\ln t}{t}$ متصلة على $[1, +\infty[$ خصوصاً على المجال $[1, +\infty[$

$$\forall t \geq 1 \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \text{ولدينا}$$

$$\forall t \geq 1 \quad \frac{\ln t}{t} \geq 0 \quad \text{وحيث أن :}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} \leq \frac{\ln t}{t} \quad \text{فإن :}$$

$$\forall x \geq 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\int_1^x \frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt \leq \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_1^x \leq \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt \leq \left[\frac{\ln^2 t}{2} \right]_1^x \quad \text{ومنه}$$

$$\frac{\ln^2 x}{4} \leq \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt \leq \frac{\ln^2 x}{2}$$

$$\ln 1 = 0$$

لأن

ج- الاستنتاج :
 لدينا : $\forall t > 0 \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$
 f متصلة على $]0, +\infty[$
 $\forall x > 0 \quad \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^x \frac{1}{e}dt$
 $F(x) \leq \left[\frac{1}{e}t\right]_0^x$
 $F(x) \leq \frac{1}{e}x < x \quad (x > 0)$
 $F(x) < x$ ومنه :
 2- لدينا (U_n) المتتالية المعرفة بـ
 $U_{n+1} = F(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 أ- إثبات أن : $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]0, 1[$
 من أجل $n = 0$ لدينا $U_0 \in]0, 1[$ خاصية محققة
 نفترض أن $0 < U_n < 1$ ونبين أن $0 < U_{n+1} < 1$
 لدينا $0 < U_n < 1$ حسب الافتراض
 F و F تزايدية قطعاً على المجال $[0, 1]$
 ومنه : $F(0) < F(U_n) < F(1)$
 لدينا : $F(0) = 0$ و $F(1) < 1$
 إذن : $0 < U_{n+1} < 1$
 وبالتالي حسب مبدأ البرهان بالترجع فإن :
 $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n \in]0, 1[$
 ب- لدينا $\forall x \in]0, +\infty[\quad F(x) < x$
 ولدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n > 0$
 إذن $\forall n \in \mathbb{N} \quad F(U_n) < U_n$
 يعني : $U_{n+1} < U_n$
 ومنه (U_n) متتالية تناقصية قطعاً
 بما أن (U_n) مصغرة بالعدد 0 وتناقصية قطعاً فهي متقاربة
 ج- لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = F(U_n)$
 $F([0, 1]) \subset [0, 1]$ و $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < U_n < 1$

III- 1- أ- إثبات أن : $\forall t > 0 \quad -t \ln t \leq \frac{1}{e}$
 نضع : $t > 0 \quad g(t) = t \ln t + \frac{1}{e}$
 لدينا : $g'(t) = 1 + \ln t$
 $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \ln t = -1$
 $\Leftrightarrow t = \frac{1}{e}$
 ومنه جدول تغيرات الدالة g

t	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$g'(t)$		$-$	$+$
$g(t)$		0	

 $g\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \frac{1}{e} = -\frac{1}{e} + \frac{1}{e} = 0$
 0 هي القيمة الدنيا المطلقة للدالة g على $]0, +\infty[$
 يعني : $\forall t > 0 \quad g(t) \geq 0$
 $t \ln t + \frac{1}{e} \geq 0$
 $\frac{1}{e} \geq -t \ln t$ ومنه :
 $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$ يعني :
 ومنه المطلوب.
 ب- لدينا : $\forall t > 0 \quad f(t) = \frac{-t \ln t}{1 + t^2}$
 لدينا : $-t \ln t \leq \frac{1}{e}$
 $0 < t \leq 1 \quad -t \ln t \geq 0$
 $\begin{cases} -t \ln t \leq \frac{1}{e} \\ \frac{1}{1 + t^2} \leq 1 \end{cases}$
 $\frac{-t \ln t}{1 + t^2} \leq \frac{1}{e}$ ومنه :
 $f(t) \leq \frac{1}{e}$ أي :
 $t \geq 1 \quad f(t) \leq 0 \leq \frac{1}{e}$
 ولدينا $f(0) = 0 \leq \frac{1}{e}$
 إذن : $\forall t \in [0, +\infty[\quad f(t) \leq \frac{1}{e}$

ولدينا $\forall x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

يعني : $e^{-\frac{1}{x}} = x^2 g(x)$

يعني أن الدالة $x \rightarrow x^2 g(x)$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0, +\infty[$

ومنه : $L(x) = \int_0^x g(t) dt = [t^2 g(t)]_0^x$

$= x^2 g(x) - 0 \times g(x) = x^2 g(x)$

ومنه : $\forall x > 0 \quad L(x) = x^2 g(x) = e^{-\frac{1}{x}}$

ج- $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}}$

$= 0 \quad (\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0)$

بما أن L متصلة على $]0, +\infty[$

فهي متصلة في 0 ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x) = L(0)$

ومنه : $L(0) = 0$

3- لدينا : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

لدينا : $\forall \quad 0 \leq p \leq n-1$

$0 \leq \frac{p}{n} < 1$

ولدينا الدالة g متصلة على $]0, +\infty[$ وخصوصا على المجال $[0, 1]$

ومنه (S_n) متقاربة ولدينا :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \int_0^1 g(t) dt$

$= L(1) - L(0)$

$= e^{-1} = \frac{1}{e}$

و (U_n) متقاربة

إذن نهايتها هي حل المعادلة $F(x) = x$

لدينا $F(x) < x \quad \forall x > 0$

أي $x \neq F(x)$ وخصوصا على $]0, 1]$

ولدينا $F(0) = 0$ إذن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $F(x) = x$

ومنه : $\lim U_n = 0$

التمرين الخامس :

لدينا $\begin{cases} g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \\ g(0) = 0 \end{cases}$

1- لدينا : الدالة : $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ متصلة على IR^* وخصوصا على $]0, +\infty[$

الدالة : $x \mapsto e^{-\frac{1}{x}}$ متصلة على IR^* وخصوصا على $]0, +\infty[$

إذن الدالة g متصلة على $]0, +\infty[$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$= \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 e^t \quad (t = -\frac{1}{x})$

$= 0 = g(0)$

إذن g متصلة في 0 . ومنه g متصلة على $]0, +\infty[$

2- لدينا : $\forall x \in [0, +\infty[$

$L(x) = \int_0^x g(t) dt$

أ- لدينا g متصلة على $]0, +\infty[$

و $0 \in [0, +\infty[$ إذن L متصلة على $[0, +\infty[$

ب- لدينا $x > 0 \quad g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}$

$= \left(-\frac{1}{x}\right)' e^{-\frac{1}{x}}$

$= (e^{-\frac{1}{x}})'$

إذن الدالة $x \rightarrow e^{-\frac{1}{x}}$ هي دالة أصلية للدالة g على $]0, +\infty[$