

حل التمرين الثاني :

(1) لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $f(z) = 0$
 نضع : $z = x + iy$ بحيث $(x, y \in \mathbb{R}^2)$
 لدينا :

$$f(z) = \frac{1}{6}[(1 + i\sqrt{3})z + 2\bar{z}]$$

$$= \frac{1}{6}[(1 + i\sqrt{3})(x + iy) + 2(x - iy)]$$

$$= \frac{1}{6}[(3x - \sqrt{3}y) + i(\sqrt{3}x - y)]$$

$$= \frac{1}{6}[\sqrt{3}(\sqrt{3}x - y) + i(\sqrt{3}x - y)]$$

$$= \frac{1}{6}[(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3} + i)]$$
 ومنه :

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{6}(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3} + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3}x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{3}x$$
 ومنه مجموعة حلول المعادلة $f(z) = 0$ هي :

$$S = \{x(\sqrt{3} + i) / x \in \mathbb{R}\}$$

(II) 1) - لنبين أن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{2}{3}u_n$$

لدينا :
 $z_{n+1} = f(z)$
 و :
 $U_n = |Z_n| = |\bar{Z}_n|$
 ومنه :
 $U_{n+1} = |Z_{n+1}|$
 $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} \geq 0$
 ثم :
 $U_{n+1} = |Z_{n+1}| = |f(Z_n)|$

$$= \frac{1}{6} |(1 + i\sqrt{3})Z_n + 2\bar{Z}_n|$$
 نعلم أن :

$$|(1 + i\sqrt{3})Z_n + 2\bar{Z}_n| \leq |(1 + i\sqrt{3})Z_n| + |2\bar{Z}_n|$$

$$|(1 + i\sqrt{3})Z_n + 2\bar{Z}_n| \leq |1 + i\sqrt{3}| |Z_n| + 2|Z_n|$$

$$U_{n+1} \leq \frac{1}{6}(2U_n + 2U_n)$$
 ومنه :

$$U_{n+1} \leq \frac{4}{6}U_n$$
 وبالتالي :
 إذن :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$$

طريقة أخرى : يمكن وضع
 $Z_n = x_n + iy_n$
 $Z_{n+1} = f(Z_n)$
 ومنه :

$$= \frac{1}{6}(\sqrt{3}x_n - y_n)(\sqrt{3} + i)$$
 إذن :

$$U_{n+1} = |Z_{n+1}| = \frac{1}{6}|\sqrt{3}x_n - y_n||\sqrt{3} + i|$$

$$= \frac{1}{3}|\sqrt{3}x_n - y_n|$$

Achamel.info

حل التمرين الأول :

(1) عدد إمكانيات توزيع الكرات الأربع على الأشخاص الستة هو
 $6^4 = 1296$ عدد الترتيبات بتكرار ل 4 عناصر من بين 6 و عددها هو
 وليكن Ω كون الإمكانيات
 إذن : $Card\Omega = 1296$
 (بطريقة أخرى : كل كرة من الكرات 1, 2, 3, 4, يمكن أن يحصل عليها
 إما الشخص A أو B أو C أو D أو E أو F ، إذن كل كرة لها 6
 إمكانيات ومنه عدد الإمكانيات هو : $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$)
 (2) ليكن R حدث حصول الشخص A على كرة واحدة على الأقل ،
 نعتبر الحدث المضاد لـ R هو : $\bar{R}$ «عدم حصول الشخص A على أي كرة»
 لدينا :
 $Card\bar{R} = 5^4$
 ومنه :
 $p(\bar{R}) = \frac{5^4}{6^4} = \left(\frac{5}{6}\right)^4$
 ونعلم أن :
 $p(R) = 1 - p(\bar{R})$
 إذن :
 $p(R) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4$
 وبالتالي :
 $p(R) = \frac{671}{1296}$

(3) نعلم أن الشخص A يمكن أن يحصل على 0 كرة أو كرة واحدة أو
 كرتين أو ثلاث كرات أو أربع كرات

ليكن X عدد الكرات التي يمكن أن يحصل عليها الشخص A

لدينا : $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

نعتبر الجدول التالي الذي يلخص توزيع الكرات بحيث يكون مجموع
 عددي الكرات المحصل عليها من طرف الشخصين B و C يساوي
 عدد الكرات المحصل عليها من طرف الشخص A.

	a	b	c	d	e	f
A	0	1	1	2	2	2
B	0	0	1	1	0	2
C	0	1	0	1	2	0

لدينا :

$$p(a) = \frac{3^4}{6^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$$

$$p(b) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1 \cdot 3^2}{6^4} = \frac{1}{12}$$

$$p(c) = p(b) = \frac{1}{12}$$

$$p(d) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^1}{6^4} = \frac{1}{108}$$

$$p(e) = p(f) = \frac{C_4^2 \cdot C_2^2}{6^4} = \frac{1}{216}$$
 إذن الإحتمال المطلوب هو

$$p = p(a) + 2p(b) + p(d) + 2p(e)$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{108} + \frac{1}{108} = \frac{107}{432}$$

ونعلم أن:

$$\sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

وبما أن:

$$0 < 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < 1$$

فإن:

$$S_n \leq 3\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \leq 3$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; S_n \leq 3$$

ب- تقارب $(S_n)_n$

لدينا:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} OM_k - \sum_{k=0}^n OM_k = OM_{n+1} > 0$$

إذن $(S_n)_n$ متتالية تزايدية قطعاً

وبما أن $(S_n)_n$ مكبورة بالعدد 3 فإنها متقاربة .

(II 1) إثبات أن: $f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$

نضع: $z = re^{i\theta}$ حيث:

$r \in \mathbb{R}_+^*$ و $\theta \in]-\pi, \pi[$

لدينا:

$$f(z) = \frac{1}{6}[(1 + i\sqrt{3})re^{i\theta} + 2re^{-i\theta}]$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{6}[2re^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\theta} + 2re^{-i\theta}] \\ &= \frac{1}{3}r[e^{i(\frac{\pi}{3}+\theta)} + e^{-i\theta}] \\ &= \frac{r}{3}e^{i\frac{\pi}{6}}[e^{i(\frac{\pi}{6}+\theta)} + e^{-i(\frac{\pi}{6}+\theta)}] \end{aligned}$$

ونعلم حسب صيغة أولير أن:

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x$

إذن:

$$f(z) = \frac{r}{3}e^{i\frac{\pi}{6}} \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)$$

ومنه:

$$f(z) = \frac{2}{3}r \cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)e^{i\frac{\pi}{6}}$$

طريقة أخرى:

لدينا:

$$f(z) = \frac{1}{6}(\sqrt{3}x - y)(\sqrt{3} + i)$$

بما أن:

$$Z = x - iy = re^{i\theta}$$

فإن:

$$y = r \sin \theta \quad \text{و} \quad x = r \cos \theta$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{6}(\sqrt{3}r \cos \theta - r \sin \theta)2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \frac{2r}{6}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \sin \theta\right) \\ &= \frac{2}{3}r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)e^{i\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

ثم نقارن U_{n+1}^2 و $\frac{4}{9}U_n^2$

نجد أن: $U_{n+1}^2 - \frac{4}{9}U_n^2 = -\frac{1}{9}(x_n + \sqrt{3}y_n)^2 \leq 0$

وبما أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \geq 0$$

فإن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$$

ب- تقارب $(u_n)_n$

لدينا:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{3}U_n$$

ومنه:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; -U_n \leq U_{n+1} - U_n \leq -\frac{1}{3}U_n$$

إذن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_{n+1} - U_n \leq 0$$

وهذا يعني أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية وبما أنها مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة .

حساب نهاية $(u_n)_n$

لنبين بالترجع أن: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0=1$ و $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$

ومنه:

$$0 \leq U_0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

ليكن n من $\mathbb{N}$ ، نفترض أن: $0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ولنبين أن

$$0 \leq U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

نعلم أن:

$$0 \leq U_{n+1} \leq U_n$$

و:

$$U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

إذن:

$$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

ومنه:

$$0 \leq U_{n+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

وبالتالي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

بما أن:

$$\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{فإن} \quad \left|\frac{2}{3}\right| < 1$$

إذن:

$$\lim U_n = 0$$

(2) أ- لنبين أنه: لكل n من $\mathbb{N}$: $S_n \leq 3$

ليكن k من $\mathbb{N}$ ولما أن Z_k هو لحن النقطة M_k فإن:

$$OM_k = |Z_k| = U_k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^n U_k$$

وحسب السؤال (II 1) ب-

نعلم أن:

$$\forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n\} ; U_k \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

إذن:

$$S_n \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$x_0 = 7U_0 + 5(4V_0)$ وبما أن :
 $x_0 = 7U_0 + 5(1 - 7U_0)$ فإن :
 $x_0 = 7(-4U_0) + 5$ إذن :
 $x_0 \equiv 5[7]$ وبالتالي :
 $7U_0 + 4V_0 = 1$ ومن جهة أخرى :
 $\Leftrightarrow 7U_0 = 1 - 4V_0$
 $x_0 = (1 - 4V_0) + 20V_0$ ومنه :
 $= 1 - 16V_0 = 1 - 4(4V_0)$
 $x_0 \equiv 1[4]$ إذن :
 $\begin{cases} x_0 \equiv 5[7] \\ x_0 \equiv 1[4] \end{cases}$ خلاصة :
 (3) لنحل في $\mathbb{Z}$ النظام
 $(*) \begin{cases} x_0 \equiv 0[7] \\ x_0 \equiv 0[4] \end{cases}$
 لتكن S_1 مجموعة حلول النظام (*)
 $x \in S_1 \Rightarrow \begin{cases} x \equiv 0[7] \\ x \equiv 0[4] \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} 7/x \\ 4/x \end{cases}$
 وبما أن : $7 \wedge 4 = 1$ فإن :
 $x \in S_1 \Rightarrow \frac{28}{x}$
 $\Rightarrow x \equiv 0[28]$
 عكسياً ، ليكن x من $\mathbb{Z}$ بحيث : $x \equiv 0[28]$
 إذن : $\frac{28}{x}$ وبما أن : $\frac{7}{28}$ و $\frac{4}{28}$
 فإن : $\frac{4}{x}$ و $\frac{7}{x}$
 يعني : $x \equiv 0[7]$ و $x \equiv 0[4]$
 إذن : $x \in S_1$
 خلاصة :
 $x \in S_1 \Leftrightarrow x \equiv 0[28]$
 $S_1 = \{28k/k \in \mathbb{Z}\}$ إذن :
 (4) لنستنتج مجموعة حلول النظام (S)
 ليكن x من $\mathbb{Z}$ ، لدينا :
 $\begin{cases} x \equiv 5[7] \\ x \equiv 1[4] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 23 \equiv 0[7] \\ x + 23 \equiv 0[4] \end{cases}$
 (حسب السؤال 3)
 $\Leftrightarrow x + 23 \equiv 0[28]$
 $\Leftrightarrow x \equiv 5[28]$
 إذن مجموعة حلول النظام (S) هي : $\{5 + 28k/k \in \mathbb{Z}\}$

(2) إثبات استقامية النقط :
 $(n \in \mathbb{N}^*) M_n, \dots, M_2, M_1$
 لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; Z_{n+1} = f(Z_n)$
 نضع : $Z_n = r_n e^{i\theta_n}$
 حيث : $\theta_n = \arg(Z_n)[2\pi]$ و $r_n = U_n = |Z_n|$
 إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; Z_{n+1} = \frac{2}{3} U_n \cos(\theta_n + \frac{\pi}{6}) e^{i\frac{\pi}{6}}$
 ومنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; Z_n = \frac{2}{3} U_{n-1} \cos(\theta_{n-1} + \frac{\pi}{6}) e^{i\frac{\pi}{6}}$
 نضع : $\alpha_n = \frac{2}{3} U_{n-1} \cos(\theta_{n-1} + \frac{\pi}{6})$
 نجد : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; Z_n = \alpha_n e^{i\frac{\pi}{6}}$
 إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \overrightarrow{OM_n} = \alpha_n \vec{w}$
 حيث : $\vec{w}(e^{i\frac{\pi}{6}})$
 وهذا يعني أن النقط $M_n(Z_n)$ (لكل n من $\mathbb{N}^*$) تنتمي إلى
 المستقيم المار من النقطة O والموجه بالمتجه $\vec{w}$
حل التمرين الثالث :
 (1) لنحل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $(E) ; 7u + 4v = 1$
 لدينا : $7 = 1.4 + 3$
 و : $4 = 1.3 + 1$
 ومنه : $1 = 4 - 1.3$
 $= 4 - 1.(7 - 1.4)$
 $= 7(-1) + 4(2)$ إذن :
 ومنه : $(E) ; 7u + 1v = 1 \Leftrightarrow 7u + 4v = 7(-1) + 4(2)$
 $\Leftrightarrow 7(u + 1) = (2 - v)$
 بما أن : $\frac{4}{u+1}$ فإن : $7 \wedge 4 = 1$
 ومنه : $(\exists k \in \mathbb{Z}) / u + 1 = 4k$
 $(\exists k \in \mathbb{Z}) / u = 4k - 1$
 وبما أن : $7(u + 1) = 4(2 - v)$
 فإن : $v = 2 - 7k$
 إذن مجموعة حلول المعادلة (E) هي
 $S = \{(4k - 1; 2 - 7k) / k \in \mathbb{Z}\}$
 (2) ليكن (U_0, V_0) حل للمعادلة (E)
 نضع : $x_0 = 7u_0 + 20v_0$
 لنبين أن : $\begin{cases} x_0 \equiv 5[7] \\ x_0 \equiv 1[4] \end{cases}$ و :
 لدينا : (u_0, v_0) حل لـ (E)
 إذن : $7U_0 + 4V_0 = 1$
 ومنه : $4V_0 = 1 - 7U_0$

$h(u) = 2 + \cos u$ $g(u) = 1 + \sin u$

و : $f(u) = \frac{g(u)}{h(u)}$

إذن : $F(x) = \int_0^x f(u) du$

لدينا g متصلة على $\mathbb{R}$ و h متصلة على المجال $[0, \pi]$

و h متصلة على $\mathbb{R}$ و $h(u) \neq 0$: $(\forall u \in \mathbb{R})$; $2 + \cos(u) \neq 0$

فإن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها خارج دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$.

و f متصلة على المجال $[0, \pi]$

إذن f تقبل دالة أصلية على $[0, \pi]$

و F دالتها الأصلية على المجال $[0, x]$ حيث $x \in [0, \pi]$

إذن F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, \pi]$

ب- نضع : $\begin{cases} t = \tan \frac{u}{2} \\ u \in [0, \pi[\end{cases}$ ومنه :

$dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \left(\frac{u}{2} \right) \right) du$

$dt = \frac{1}{2} (1 + t^2) du$: إذن

$dt = \frac{2dt}{1 + t^2}$: أي

ثم من أجل $u = 0$ نجد $t = 0$

ومن أجل $u = x$ نجد $t = \tan \left(\frac{x}{2} \right)$

وبما أن : $\sin u = \frac{2t}{1 + t^2}$

و $\cos u = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$

فإن : لكل x من المجال $[0, \pi[$ لدينا :

$F(x) = \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{1 + \frac{2t}{1 + t^2}}{2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2}} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2}$

$= 2 \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{1 + t^2 + 2t}{2 + 2t + 1 - t^2} \cdot \frac{2dt}{1 + t^2}$

$= 2 \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{(1 + t)^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)} dt$

ومن المطلوب :

ج- نعلم أن :

$\forall x \in [0, \pi[; F(x) = 2 \int_0^{\tan \frac{x}{2}} \frac{(1 + t)^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)} dt$ و

$(\forall t \in \mathbb{R}); \frac{(1 + t)^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)} = \frac{t}{1 + t^2} + \frac{t}{3 + t^2} + \frac{t}{3 + t^2}$

حل التمرين الرابع :

(1) لنبين أن :

$(\forall t \in \mathbb{R}); \frac{(1 + t)^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)} = \frac{t}{1 + t^2} - \frac{t}{3 + t^2} + \frac{1}{3 + t^2}$

لدينا :

$(\forall t \in \mathbb{R}); \frac{t}{1 + t^2} - \frac{t}{3 + t^2} + \frac{1}{3 + t^2}$

$= \frac{t(3 + t^2) - t(1 + t^2) + (1 + t^2)}{(1 + t^2)(3 + t^2)}$

$= \frac{3t + t^3 - t - t^3 + 1 + t^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)}$

$= \frac{t^2 + 2t + 1}{(1 + t^2)(3 + t^2)}$

$= \frac{(t + 1)^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)}$

إذن :

$(\forall t \in \mathbb{R}); \frac{(t + 1)^2}{(1 + t^2)(3 + t^2)} = \frac{t}{1 + t^2} - \frac{t}{3 + t^2} + \frac{1}{3 + t^2}$

(2) لنبين أن :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) \int_0^\alpha \frac{t}{3 + t^2} dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)$

لدينا :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \frac{t}{3 + t^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \frac{t^2}{3}} \right)$

$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} t \right)^2} \right)$

$(\forall t \in \mathbb{R}) ; \frac{t}{3 + t^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} t \right)^2} \right)$

ومنه :

$(\forall \alpha \in \mathbb{R}) ; \int_0^\alpha \frac{t}{3 + t^2} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^\alpha \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} t \right)^2} dt$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\text{Arc tan} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} t \right) \right]_0^\alpha$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \right)$

ومن المطلوب .

(3) لدينا : $F(x) = \int_0^x \frac{1 + \sin u}{2 + \cos u} du$; $x \in [0, \pi]$

أ- لنبين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, \pi]$

نعتبر الدوال العددية f و g و h المعرفة كما يلي :

جدول تغيرات h هو:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		0	
$h(x)$		0	

من خلال الجدول نلاحظ أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة h على $\mathbb{R}$ ومنه:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; h(x) \geq 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x - x - 1 \geq 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$$

يعني:

ومنه:

استنتاج:

$$f_n(1) = \frac{1}{n} - e^{-n}$$

لدينا:

$$f_n(n) = \frac{e^n - n}{ne^n}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$$

ونعلم أن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* ; n \geq 2) ; e^n \geq n + 1$$

إذن:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^* ; n \geq 2) ; e^n - n \geq 1 > 0$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; (n \geq 2) ; e^n - n > 0$$

أي:

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f_n(1) > 0 : \text{فإن } ne^n > 0$$

$$\frac{1}{n} < \alpha_n < 1 : \text{د- لنبين أن:}$$

نعلم أن المعادلة: $f_n(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α_n في $\mathbb{R}$.

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0 \quad \text{و} \quad f_n(1) < 0$$

فإن حسب مبرهنة القيم الوسطية نستنتج أن: $\frac{1}{n} < \alpha_n < 1$

(4) لننشئ (C_2) :

(C_2) هو منحنى الدالة f_2 المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f_2(x) = \frac{x}{2} - e^{-2x}$$

لدينا: $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل لـ (C_2) بجوار $+\infty$

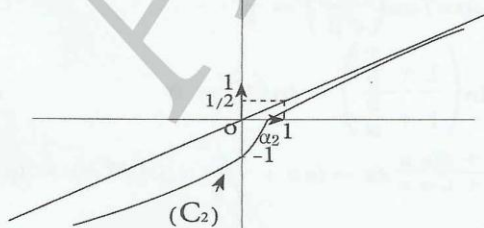
و (C_2) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه المستقيم $y = \frac{1}{2}x$ بجوار $-\infty$

$$f_2(0) = -1$$

و

$$f_2(x) - \frac{x}{2} = -e^{-2x} < 0$$

فإن (C_2) يوجد تحت المستقيم $y = \frac{x}{2}$



فإننا نستنتج أن (C_n) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه المستقيم الذي

$$\text{معادلته } y = \frac{1}{n}x \text{ بجوار } -\infty$$

(2) حساب $f'_n(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R})$

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: f_n دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع دالتين قابلتين

$$\text{للاشتقاق على } \mathbb{R} \text{ هما: } x \rightarrow \frac{x}{n} \text{ و } x \rightarrow -e^{-nx}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'_n(x) = \frac{1}{n} + ne^{-nx}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-nx} > 0 \quad n > 0$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) f'_n(x) > 0$$

فإن:

ومنه f_n تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f_n :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$
$f_n(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(3) أ- لنبين أن المعادلة: $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $\mathbb{R}$

لدينا f_n دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f_n تزايدية

قطعاً على $\mathbb{R}$ و $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ إذن f_n تقابل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$ و $0 \in \mathbb{R}$

إذن لـ 0 سابق وحيد α_n في $\mathbb{R}$ ، يعني:

المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α_n في $\mathbb{R}$.

$$\text{ب- لنبين أن: } f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

$$\text{لدينا: } f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} - e^{-1}$$

$$= \frac{e - n^2}{en^2}$$

$$n^2 \geq 4 \quad \text{ومنه } n \geq 2$$

$$\text{ولدينا: } 2 < e < 3$$

$$\text{إذن: } e < n^2 \quad \text{ومنه } e - n^2 < 0$$

$$\text{ومنه: } f_n\left(\frac{1}{n}\right) < 0$$

ج- لنبين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x \geq x + 1$

نعبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x) = e^x - x - 1$

لدينا h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; h'(x) = e^x - 1$$

و

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

حل التمرين الخامس :

لدينا $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$ (حيث $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$)
1) حساب النهايتين :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} - e^{-nx} \right) = +\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{لأن: لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ بحيث } n \geq 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-nx} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{nx}} = 0 \quad \text{و} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} x = +\infty \end{array} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{n} - e^{-nx} \quad \text{ثم:}$$

نضع: $t = -nx$ ومنه $x = \frac{-t}{n}$

$$(n \geq 2)(t \rightarrow +\infty) \Leftrightarrow (x \rightarrow -\infty) \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-t}{n^2} - e^t \right) = -\infty \quad \text{إذن:}$$

ب- دراسة الفرعين اللانهائيين لـ (C_n)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \quad \text{لدينا:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} \quad \text{ومنه نحسب:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{n} - e^{-nx}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{xe^{nx}} \right) = \frac{1}{n}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{nx} = +\infty \quad \text{لأن:} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{1}{n}x \right) \quad \text{ثم نحسب:}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{n} - e^{-nx} - \frac{x}{n} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-nx} = 0$$

$$\text{إذن: } (C_n) \text{ يقبل مقاربا مائلا بجوار } +\infty \text{ معادلته } y = \frac{1}{n}x$$

ملحوظة :

يمكن اتباع الطريقة التالية لتحديد الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f_n(x) - \frac{x}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -e^{-nx} = 0 \quad \text{لدينا:}$$

(لأن $n > 0$)

$$\text{ومنه المستقيم الذي معادلته } y = \frac{1}{n}x \text{ مقارب مائل لـ } (C_n) \text{ بجوار } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \quad \text{ثم لدينا}$$

$$\text{وبملاحظة أن: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f_n(x) - \frac{x}{n} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{-nx} = -\infty$$

إذن: لكل x من المجال $[0, \pi[$

لدينا :

$$\begin{aligned} F(x) &= 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{t}{1+t^2} - \frac{t}{3+t^2} + \frac{1}{3+t^2} \right) dt \\ &= \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{2t}{1+t^2} - \frac{2t}{3+t^2} \right) dt + 2 \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \frac{1}{3+t^2} dt \\ &= \int_0^{\tan(\frac{x}{2})} \left(\frac{(1+t^2)'}{1+t^2} - \frac{(3+t^2)'}{3+t^2} \right) dt + 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= [\ln(1+t^2) - \ln(3+t^2)]_0^{\tan(\frac{x}{2})} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \left[\ln \left(\frac{1+t^2}{3+t^2} \right) \right]_0^{\tan(\frac{x}{2})} + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \ln \left(\frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{3+\tan^2 \frac{x}{2}} \right) - \ln \left(\frac{1}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) \\ &= \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc tan} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{3+\tan^2 \frac{x}{2}} \right) \end{aligned}$$

ومنه المطلوب :

د- لدينا : F دالة متصلة على المجال $[0, \pi]$ ، إذن فهي متصلة على اليسار

في π

ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} F(x) = F(\pi)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc Tan} \left(\frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1+\tan^2 \frac{x}{2}}{3+\tan^2 \frac{x}{2}} \right) = F(\pi)$$

$$\text{نضع: } u = \tan \frac{x}{2}$$

ومنه: عندما يؤول x إلى π حيث $x < \pi$ فإن u يؤول إلى $+\infty$

ومنه :

$$\begin{aligned} F(\pi) &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc Tan} \left(\frac{u}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1+u}{3+u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln 3 + \frac{2}{\sqrt{3}} \text{Arc Tan} \left(\frac{u}{\sqrt{3}} \right) + \ln \left(\frac{1+\frac{1}{u}}{1+\frac{3}{u}} \right) \end{aligned}$$

$$= \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \text{Arc Tan} \left(\frac{u}{\sqrt{3}} \right) = \frac{\pi}{2}$$

لأن :

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{1+\frac{1}{u}}{1+\frac{3}{u}} \right) = \ln(1) = 0$$

و :

ومنه :

$$\int_0^{\pi} \frac{1+\sin u}{2+\cos u} du = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \quad \text{إذن: } F(\pi) = \ln 3 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(5) - لنبين أن :

$$(\forall n \in N^* ; n \geq 2) ;$$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$$

لدينا من جهة :

$$\frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$$

$$= \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{n+1}{n} \right)$$

$$= \frac{n+1}{n} e^{-(n+1)\alpha_n} e^{\alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$= \frac{n+1}{n} e^{-n\alpha_n - \alpha_n + \alpha_n} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

$$= \frac{ne^{-n\alpha_n}}{n} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

ثم لدينا :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

ومن جهة أخرى ، نعلم أن :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha_n}{n} - e^{-n\alpha_n} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_n = ne^{-n\alpha_n}$$

ومنه :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-n\alpha_n}}{n+1} - e^{-(n+1)\alpha_n}$$

وبالتالي المطلوب .

-ب- استنتاج :

لدينا : لكل n من N بحيث $n \geq 2$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$$

بما أن :

$$(\forall n \in N^* \setminus \{1\}) ; \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} > 0$$

و :

$$\alpha_n > \frac{1}{n}$$

أي :

$$\alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1$$

و :

$$e^{\alpha_n} > \alpha_n + 1$$

إذن :

$$e^{\alpha_n} > \frac{1}{n} + 1$$

أي :

$$e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 > 0$$

فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$$

-ج- بما أن :

$$(\forall n \in N^* \setminus \{1\}) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$$

فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

وبما أن الدالة f_{n+1} تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ ، فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

وهذا يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية.

-تقارب $(\alpha_n)_{n \geq 2}$

نعلم أن :

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$$

وبما أن :

$$(\forall n \geq 2) ; \frac{1}{n} > 0$$

فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; 0 < \alpha_n < 1$$

إذن $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ مصغرة بالعدد 0 ومنه متقاربة.

(6) - لنبين أن :

$$(\forall n \in N^* - \{1\}) \quad \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$$

لدينا :

$$(\forall n \in N^* - \{1\}) \quad f_n(\alpha_n) = 0$$

ومنه :

$$(\forall n \in N^* - \{1\}) \quad \frac{\alpha_n}{n} = e^{-n\alpha_n}$$

وبما أن :

$$(\forall n \in N^* - \{1\}) \quad \frac{1}{n} < \alpha_n < 1$$

إذن :

$$(\forall n \in N^* - \{1\}) \quad \frac{1}{n^2} < \frac{\alpha_n}{n} < \frac{1}{n}$$

وبالتالي :

$$(\forall n \in N^* - \{1\}) \quad \frac{1}{n^2} < e^{-n\alpha_n} < \frac{1}{n}$$

-ب- استنتاج :

لدينا : لكل n من N بحيث $n \geq 2$

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{(n+1)} \left(e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 \right)$$

بما أن :

$$(\forall n \in N^* \setminus \{1\}) ; \frac{ne^{-(n+1)\alpha_n}}{n+1} > 0$$

و :

$$\alpha_n > \frac{1}{n}$$

أي :

$$\alpha_n + 1 > \frac{1}{n} + 1$$

و :

$$e^{\alpha_n} > \alpha_n + 1$$

إذن :

$$e^{\alpha_n} > \frac{1}{n} + 1$$

أي :

$$e^{\alpha_n} - \frac{1}{n} - 1 > 0$$

فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$$

-ج- بما أن :

$$(\forall n \in N^* \setminus \{1\}) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq 0$$

فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; f_{n+1}(\alpha_n) \geq f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

وبما أن الدالة f_{n+1} تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ ، فإن :

$$(\forall n \geq 2) ; \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

وهذا يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ تناقصية.