

Achamel.info

تصحيح الدورة الإستدراكية 2012

التمرين رقم 1 :

1- أ- أبين أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$
 لدينا $\vec{AC}(3;2;-2)$ و $\vec{AB}(3;0;-3)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

* استنتج أن $2x - y + 2z + 6 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

المتجه $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

ومنه $6x - 3y + 6z + d = 0$ (حيث $d \in \mathbb{R}$) معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) ، وبما أن $A \in (ABC)$

$$6 \times (-3) - 3 \times 0 + 6 \times 0 + d = 0 \quad \text{فإن} \quad d = 18$$

أي $d = 18$ إذن $6x - 3y + 6z + 18 = 0$

معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ومنه $2x - y + 2z + 6 = 0$ معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

ب- أحسب المسافة $d(\Omega, (ABC))$ واستنتج أن المستوى (ABC) مماس للكرة (S) .

لدينا

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{9}{3} = 3$$

إذن المستوى (ABC) مماس للكرة (S) .

2- أ- (D) عمودي على المستوى (ABC)

إذن المتجه $\vec{u}(2; -1; 2)$ موجهة للمستقيم (D)

وبما أن (D) يمر من النقطة Ω فإن :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

ب- أبين أن مثلث H نقطة تماس المستوى (ABC) والكرة (S) هو $(-1; 2; -1)$

لتكن $H(a; b; c)$ نقطة تماس المستوى (ABC) والكرة (S) .

$$\text{لدينا } 2a - b + 2c + 6 = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 + 2t \\ b = 1 - t \\ c = 1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$2(1 + 2t) - (1 - t) + 2(1 + 2t) + 6 = 0 \quad \text{إذن}$$

$$9 + 9t = 0 \quad \text{أي } t = -1 \quad \text{ومنه}$$

$$\begin{cases} a = 1 + 2 \times (-1) = -1 \\ b = 1 - (-1) = 2 \\ c = 1 + 2 \times (-1) = -1 \end{cases} \quad \text{أي}$$

و بالتالي $(-1; 2; -1)$ هو مثلث إحداثيات النقطة H

التمرين رقم 2 :

$$1- \text{أ- بين أن } \frac{c-a}{b-a} = i$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{8+3i-2+i}{6-7i-2+i} = \frac{6+4i}{4-6i} = \frac{3+2i}{2-3i}$$

$$= \frac{(3+2i)(2+3i)}{4+9} = i$$

ب- استنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

$$\left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \quad \text{نستنتج أن } \frac{c-a}{b-a} = i$$

$$\text{و } \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{أي أن } AB = AC$$

$$\widehat{(\vec{AB}; \vec{AC})} = \frac{\pi}{2}$$

و بالتالي المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

2- أ- أتأكد من أن لحق النقطة Ω هو $\omega = 7 - 2i$

لدينا $B(6; -7)$ و $C(8; 3)$ و Ω منتصف القطعة $[BC]$

ومنه $\Omega(7; -2)$ إذن لحق Ω هو $\omega = 7 - 2i$

ب- أبين أن : $z' = -iz + 9 + 5i$

$$M' = R_{(\Omega; -\frac{\pi}{2})}(M)$$

$$z' - \omega = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - \omega)$$

$$z' - (7 - 2i) = (-i)(z - (7 - 2i))$$

$$z' = -iz + 5i + 9$$

ج- أبين أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

$$-i(2 - i) + 5i + 9 = 3i + 8$$

وهذا يعني أن النقطة C هي صورة النقطة A بالدوران R .

التمرين رقم 3 :

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ وحدها الأول

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

* أكتب v_n بدلالة n

(v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و $v_0 = \frac{1}{2}$

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n \quad \text{إذن}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{7}\right)^n \quad \text{ومنه}$$

ب- أبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

لدينا: $0 < \frac{1}{7} < 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \quad \text{ومنه:}$$

* استنتج نهاية المتتالية (u_n)

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \quad \text{لدينا}$$

$$\text{إذن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + v_n}{1 - v_n} = \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

التمرين رقم 4 :

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وأربع كرات بيضاء وثلاث كرات خضراء (نعتبر أنه لا يمكن التمييز بين البيدقات باللمس).

نسحب عشوائيا وفي آن واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1- ليكن A هو الحدث «الحصول على ثلاث كرات حمراء»

$$* \text{ أبين أن } p(A) = \frac{1}{22}$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_5^3}{C_{12}^3} = \frac{\frac{5!}{3!2!}}{\frac{12!}{3!9!}} = \frac{1}{22}$$

(Ω كون الإمكانات)

2- ليكن B هو الحدث «الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون»

$$* \text{ أبين أن } p(B) = \frac{3}{44}$$

$$p(B) = \frac{C_5^3 + C_4^3 + C_3^3}{C_{12}^3} = \frac{\frac{5!}{3!2!} + 4 + 1}{\frac{12!}{3!9!}} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3- ليكن C هو الحدث «الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل»

$$* \text{ أبين أن } p(C) = \frac{37}{44} \quad \text{الحدث } \bar{C} \text{ هو الحدث المضاد للحدث } C$$

(u_n) المتتالية العددية حيث $u_0 = 3$ و $u_{n+1} = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4}$

لكل n من $\mathbb{N}$

1- أبين بالترجع أن $u_n > 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 3 > 1$

نفترض أن $u_n > 1$ ونبين أن $u_{n+1} > 1$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1 = \frac{u_n - 1}{3u_n + 4}$$

بما أن $u_n > 1$ (افتراض الترجع)

$$\text{فإن } 3u_n + 4 > 0 \quad \text{و} \quad u_n - 1 > 0$$

$$\text{ومنه } u_{n+1} - 1 > 0 \quad \text{أي } u_{n+1} > 1$$

وبالتالي $u_n > 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

$$2- \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

$$* \text{ أتحقق من أن } 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$$

* استنتج أن $1 - v_n > 0$ لكل n من $\mathbb{N}$

$$\text{بما أن } u_n > 1 \quad \text{فإن } \frac{2}{u_n + 1} > 0$$

$$\text{ومنه فإن } 1 - v_n > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{ب- أبين أن } u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \quad \text{لكل } n \text{ من } \mathbb{N}, \text{ لدينا}$$

$$1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1} \Leftrightarrow u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n}$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}$$

3- أ- أبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} - 1}{\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1}$$

$$= \frac{u_n - 1}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{1}{7} \times v_n$$

ب- أبين أن الدالة f تزايدية على $\mathbb{R}$.

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $e^x > 0$ ومنه $f'(x) > 0$

وبالتالي الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.

ج- أبين أن $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O .

لدينا: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

هي معادلة المماس للمنحنى (C) عند النقطة ذات الأضلاع x_0

ولدينا $f'(0) = \frac{3}{2}$ و $f(0) = 0$

إذن $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 0$

هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T)

ومنه $y = \frac{3}{2}x$ هي معادلة ديكارتية للمستقيم (T) مماس المنحنى (C) في النقطة O .

4- أ- أبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 1 = +\infty$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x + 1} = 0$

وبما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)]$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1} \right) = 0$

استنتاج: المستقيم (D) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

ج- أبين أن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) .

لدينا $(D): y = x + 1$

و $f(x) - (x + 1) = \frac{-2}{e^x + 1} < 0$

إذن المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D)

5- إنشاء المستقيمين (D) و (T) والمنحنى (C)

(عدم الحصول على أي كرة حمراء)

$$p(\overline{C}) = \frac{C_7^3}{C_{12}^3} = \frac{3!4!}{200} = \frac{35}{200} = \frac{7}{44}$$

ومنه $p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{37}{44}$

ملحوظة: يمكن حساب $p(C)$ بطريقة ثانية وذلك باستعمال ما يلي:

$$p(C) = \frac{C_5^1 \cdot C_7^2 + C_5^2 \cdot C_7^1 + C_5^3}{C_{12}^3}$$

التمرين رقم 5:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

و (C) المنحنى الممثل لـ f في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- أبين أن $f(-x) = -f(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

و استنتج أن النقطة O مركز تماثل المنحنى (C) .

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}$$

أي $f(-x) = -x + \frac{1 - e^x}{e^x + 1} = -\left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = -f(x)$

إذن f دالة فردية ومنه النقطة O مركز تماثل المنحنى (C) .

2- أتحقق من أن $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

$$f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1 - 2}{e^x + 1}$$

$$= x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$$

ومنه $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

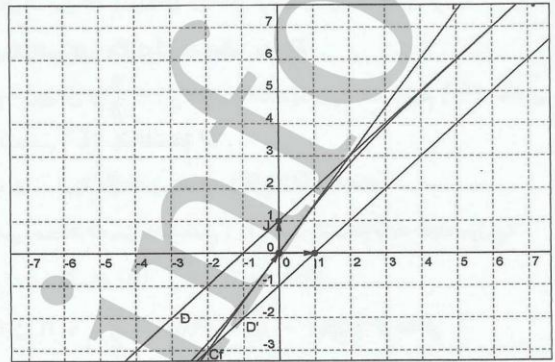
3- أ- أبين أن: $(\forall n \in \mathbb{R}); f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

$$f'(x) = \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}\right)' = (x + 1)' - \left(\frac{2}{e^x + 1}\right)'$$

$$f'(x) = 1 + \frac{2(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

ومنه $f'(0) = \frac{3}{2}$

* أتحقق من أن $f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



6- أ- أبين أن H دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

$$H'(x) = (x - \ln(e^x + 1))' \\ = 1 - \frac{(e^x + 1)'}{e^x + 1} = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

إذن الدالة H دالة أصلية للدالة $x \rightarrow \frac{1}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$

ب- استنتج أن $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = \ln 4 - \ln 3$

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{e^x + 1} dx = [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} \\ = \ln 2 - \ln(e^{\ln 2} + 1) - (0 - \ln(e^0 + 1)) \\ = \ln 2 - \ln(2 + 1) + \ln(1 + 1) \\ = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\ = 2\ln 2 - \ln 3 \\ = \ln 2^2 - \ln 3 \\ = \ln 4 - \ln 3$$

ج- أحسب A مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و

المستقيم (D) والمستقيمين اللذين معادلاتهما $x = \ln 2$ و $x = 0$

$$A = \int_0^{\ln 2} (-f(x) + (x + 1)) dx = \int_0^{\ln 2} \left(\frac{2}{e^x + 1} \right) dx \\ = 2\ln(\ln 4 - \ln 3) \cdot u$$

مع u وحدة قياس المساحة .

$$(\forall x \in [0; \ln 2] ; f(x) < x + 1)$$