

ومنه النقطة الوحيدة التي تحقق $F(M) = M$ هي النقطة Ω

(3) أ- لنحدد بدلالة a كل من b و c و d :

* لدينا : $B = F(A)$

ومنه : $b - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a - i)$

إذن : $b = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a - i) + i$

* لدينا : $C = F(B)$

ومنه : $c - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(b - i)$

$$= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(a - i)$$

$$= 4e^{i\frac{8\pi}{3}}(a - i)$$

إذن : $c = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}(a - i) + i$

* لدينا : $D = F(C)$

ومنه : $d - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(c - i)$

$$= 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \cdot 4e^{i\frac{2\pi}{3}}(a - i) \quad (e^{i2\pi} = 1)$$

$$= 8(a - i)$$

إذن : $d = 8a - 7i$

ب- لنبين أن النقط Ω و A و D مستقيمية.

لدينا حسب السؤال أ- $d - i = 8(a - i)$

ومنه : $\frac{d - i}{a - i} = 8$

يعني : $\frac{d - i}{a - i} \in \mathbb{R}$

إذن النقط Ω و A و D مستقيمية.

ج- لنبين أن Ω هو مرجح النظمة المتزنة :

$$S = \{(B, 4); (C, 2); (D, 1)\}$$

ليكن G مرجح النظمة المتزنة (S)

لدينا : $Z_G = \frac{4Z_B + 2Z_C + Z_D}{7}$

أي : $Z_G = \frac{4b + 2c + d}{7}$

$$= \frac{8e^{i\frac{4\pi}{3}}(a - i) + 4i + 8e^{i\frac{2\pi}{3}}(a - i) + 2i + 8(a - i) + i}{7}$$

$$= \frac{8(a - i)(e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1) + 7i}{7}$$

$$= i = Z\Omega$$

$$((e^{i\frac{4\pi}{3}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} + 1) = \bar{j} + j + 1 = 0 \quad (\text{لأن})$$

ومنه المطلوب : $G = \Omega$

Achamel.info

حل التمرين الأول :

(1) تحديد طبيعة التطبيقين r و h

* لدينا : $Z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}Z + \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

وبما أن : $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}} \neq 1$

فإن الصيغة العقدية للتطبيق r هي : $Z_1 = aZ + b$

حيث : $a = e^{i\frac{\pi}{3}}$ و $b = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$

ومنه r دوران زاويته هي : $\frac{\pi}{3}$ و مركزه هو النقطة $\Omega_1(w_1)$ بحيث :

$$w_1 = aw_1 + b$$

$$\Leftrightarrow w_1(1 - a) = b$$

$$\Leftrightarrow w_1 = \frac{b}{1 - a} = \frac{\sqrt{3} + i}{1 - i\sqrt{3}} = i$$

* لدينا : $Z_2 = -2Z + 3i$

إذن : h هو التحاكي الذي نسبته -2 و مركزه $\Omega(w_2)$ حيث :

$$w_2 = -2w_2 + 3i$$

$$\Leftrightarrow 3w_2 = 3i$$

$$\Leftrightarrow w_2 = i = w_1$$

ملحوظة : الدوران r و التحاكي h لهما نفس المركز.

(2) أ- لنبين أن : $Z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(Z - i)$

لدينا : $F = \text{hor}$

ومنه : $F(M) = M' \Leftrightarrow \text{hor}(M) = M'$

$$\Leftrightarrow h(M_1) = M'$$

حيث : $M_1(Z_1)$ و $M_1 = r(M)$

$$h(M_1) = M' \Leftrightarrow Z' - i = -2(Z_1 - i)$$

$$r(M) = M_1 \Leftrightarrow Z_1 - i = e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - i)$$

ومنه : $Z' - i = -2e^{i\frac{\pi}{3}}(Z - i)$

وبما أن : $-1 = e^{i\pi}$

$$Z' - i = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}(Z - i)$$

ومنه المطلوب.

ب- لنتحقق من أن : $F(\Omega) = \Omega$

لنحدد النقطة $M(Z)$ بحيث : $F(M) = M'$

$$F(M) = M \Leftrightarrow Z - i = e^{i\frac{4\pi}{3}}(Z - i)$$

$$\Leftrightarrow (Z - i)(1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z - i = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = i$$

$$(\text{لأن : } 1 - 2e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2 + i\sqrt{3} \neq 0)$$

● لكل x و y من E ، لدينا : $x * y = x + y - 3xy$
 $= y + x - 3yx$
 $= y * x$

ومنه * تبادلي .

● لكل x و y و z من E ، لدينا :

$$\begin{aligned} x * (y * z) &= x * (y + z - 3yz) \\ &= x(y + z - 3yz) - 3x(y + z - 3yz) \\ &= x + y + z - 3yz - 3xy - 3xz + 9xyz \\ (x * y) * z &= (x + y - 3xy) * z \\ &= (x + y - 3xy)z - 3(x + y - 3xy)z \\ &= x + y + z - 3xy - 3xz - 3yz + 9xyz \\ x * (y * z) &= (x * y)z \end{aligned}$$

إذن :

ومنه * قانون تجميعي :

● ليكن e عنصر من E بحيث :

$$\begin{aligned} x * e &= x \quad (*) \text{ (تبادلي)} \\ x * e &= x \Leftrightarrow x + e - 3xe = x \\ &\Leftrightarrow e(1 - 3x) = 0 \end{aligned}$$

وحيث أن $x \in E$ فإن $1 - 3x \neq 0$

$$x * e = x \Leftrightarrow e = 0$$

ومنه 0 هو العنصر المحايد للقانون *

● ليكن x من E ، لكل x' من E

$$\begin{aligned} x * x' &= 0 \Leftrightarrow x + x' - 3xx' = 0 \\ &\Leftrightarrow x'(1 - 3x) = -x \\ &\Leftrightarrow x' = \frac{x}{3x - 1} \quad (\text{لأن } 3x - 1 \neq 0) \end{aligned}$$

إذن كل عنصر x من E له مماثل هو $\frac{x}{3x - 1}$ بالنسبة للقانون *

خلاصة : $(E, *)$ زمرة تبادلية .

(2) أ- لنبين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$

● لكل x و y عنصرين من E لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi(x * y) &= 1 - 3(x * y) \\ &= (1 - 3x)(1 - 3y) \\ &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

إذن φ تشاكل من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$

د- لنحدد (E) مجموعة النقط $A(a)$ بحيث النقطة D تنتمي إلى المحور الحقيقي .

لدينا : D تنتمي إلى المحور الحقيقي

يكافئ : $d \in IR$

$$\text{ومنه : } d \in IR \Leftrightarrow \text{Im}(8a - 7i) = 0$$

نضع : $a = x + iy$ حيث $(x, y) \in IR^2$

$$\begin{aligned} \text{إذن : } d \in IR &\Leftrightarrow \text{Im}(8x + i(8y - 7)) = 0 \\ &\Leftrightarrow 8y - 7 = 0 \end{aligned}$$

وبالتالي المجموعة (E) هي المستقيم الذي معادلته الديكارتية

$$8y - 7 = 0$$

هي :

حل التمرين الثاني :

(1) أ- لنتحقق من أن :

$$\begin{aligned} (\forall (x, y) \in IR^2) ; (1 - 3x)(1 - 3y) &= 1 - 3(x * y) \\ x * y &= x + y - 3xy \\ 1 - 3(x * y) &= 1 - 3(x + y - 3xy) \end{aligned}$$

لدينا :

ومنه :

$$\begin{aligned} &= 1 - 3x - 3y + 9xy \\ &= (1 - 3x) - 3y(1 - 3x) \\ &= (1 - 3x)(1 - 3y) \end{aligned}$$

ومنه المطلوب .

ب- لنبين أن : $(IR - \{\frac{1}{3}\}, *)$ زمرة تبادلية .

$$\text{نضع : } E = IR - \{\frac{1}{3}\}$$

● لدينا : $O \in E$ إذن : $E \neq \emptyset$

● لكل x و y من E ، لدينا :

$$\begin{aligned} x * y &= \frac{1}{3}[1 - (1 - 3x)(1 - 3y)] \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - 3x)(1 - 3y) \end{aligned}$$

$$\text{ومنه : } x * y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}(1 - 3x)(1 - 3y)$$

وحيث أن :

$$x \in E \text{ و } y \in E$$

$$x \neq \frac{1}{3} \text{ و } y \neq \frac{1}{3}$$

فإن :

يعني : $1 - 3x \neq 0$ و $1 - 3y \neq 0$

$$\text{إذن : } x * y - \frac{1}{3} \neq 0$$

وهذا يعني أن : $x * y \in E$

ومنه * قانون تركيب داخلي في E .

● ليكن $y \in IR^*$. ليكن x من E .

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = 1 - 3x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y \in E$$

إذن : $(\forall y \in IR^*) ; (\exists ! x \in E) / y = \varphi(x)$ وهذا يعني أن φ تقابل من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$ خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$

ب- لنبين أن : $\varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$ لدينا : $\varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[\Leftrightarrow IR_+^* = \varphi(]-\infty, \frac{1}{3}[)$ ليكن x من $]-\infty, \frac{1}{3}[$ إذن : $x < \frac{1}{3}$ ومنه : $1 - 3x > 0$ أي : $\varphi(x) \in IR_+^*$ إذن : $\varphi(]-\infty, \frac{1}{3}[) \subset IR_+^*$

ليكن y من IR_+^* إذن يوجد عنصر وحيد x من E بحيث : $y = \varphi(x)$ وبما أن : $y > 0$ فإن $\varphi(x) > 0$ أي : $1 - 3x > 0$ أي : $x < \frac{1}{3}$ ومنه : $x \in]-\infty, \frac{1}{3}[$ إذن : لكل x من IR_+^* يوجد x من $]-\infty, \frac{1}{3}[$ بحيث : $y = \varphi(x)$ وهذا يعني أن : $IR_+^* \subset \varphi(]-\infty, \frac{1}{3}[)$ خلاصة : $\varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$

ج- لنبين أن : $(]-\infty, \frac{1}{3}[, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(IR - \{\frac{1}{3}\}, *)$ لدينا φ^{-1} تشاكل تقابلي من $(IR^*, \times)$ نحو $(E, *)$ إذن Ψ قصور φ^{-1} على IR_+^* هو أيضا تشاكل من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$ و $\Psi(IR_+^*) = \varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$ نعلم أن $(IR^*, \times)$ زمرة

إذن $(\Psi(IR_+^*), *)$ زمرة

وبما أن $(E, *) \subset (\Psi(IR_+^*), *)$ زمرة

فإن : $(]-\infty, \frac{1}{3}[, *)$ زمرة

ومنه المطلوب .

(3) - لنبين أن :

$$(\forall x \in IR - \{\frac{1}{3}\}) ; (\forall n \in N) ; \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$$

نستعمل برهانا بالترجع :

من أجل $n=0$ ، لدينا : $x^{(0)} = 0$ ومنه : $\varphi(x^{(0)}) = \varphi(x(0)) = 1$ و $(\varphi(x))^{(0)} = 1$ إذن : $\varphi(x^{(0)}) = (\varphi(x))^{(0)}$ نفترض أن : $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$ ولنبين أن : $\varphi(x^{(n+1)}) = (\varphi(x))^{n+1}$ لدينا : $x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$ ومنه : $\varphi(x^{(n+1)}) = \varphi(x^{(n)} * x)$ $= \varphi(x^{(n)}) \times \varphi(x)$ $= (\varphi(x))^n \times \varphi(x)$ $= (\varphi(x))^{n+1}$ إذن : $(\forall x \in IR - \{\frac{1}{3}\}) ; (\forall n \in N) ; \varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^n$ ب- لنستنتج $x^{(n)}$ بدلالة x و n حيث : $x \in IR - \{\frac{1}{3}\}$ و $n \in IN$ لدينا : $\varphi(x^{(n)}) = 1 - 3x^{(n)}$ و $(\varphi(x))^{(n)} = (1 - 3x)^n$ وبما أن : $\varphi(x^{(n)}) = (\varphi(x))^{(n)}$ فإن : $1 - 3x^{(n)} = (1 - 3x)^n$ إذن : $x^{(n)} = \frac{1}{3}[1 - (1 - 3x)^n]$ إذن المطلوب .

(4) - لنبين أن (IR, T) زمرة تبادلية .

● لدينا لكل (x, y) من IR^2 :

$$xTy = x + y - \frac{1}{3} = y + x - \frac{1}{3} = yTx$$

ومنه T قانون تبادلي في IR

● ليكن $y \in IR^*$. ليكن x من E .

$$y = \varphi(x) \Leftrightarrow y = 1 - 3x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}y \in E$$

إذن : $(\forall y \in IR^*) ; (\exists ! x \in E) / y = \varphi(x)$ وهذا يعني أن φ تقابل من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$ خلاصة : φ تشاكل تقابلي من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$

ب- لنبين أن : $\varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$ لدينا : $\varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[\Leftrightarrow IR_+^* = \varphi(]-\infty, \frac{1}{3}[)$ ليكن x من $]-\infty, \frac{1}{3}[$ إذن : $x < \frac{1}{3}$ ومنه : $1 - 3x > 0$ أي : $\varphi(x) \in IR_+^*$ إذن : $\varphi(]-\infty, \frac{1}{3}[) \subset IR_+^*$

ليكن y من IR_+^* إذن يوجد عنصر وحيد x من E بحيث : $y = \varphi(x)$ وبما أن : $y > 0$ فإن $\varphi(x) > 0$ أي : $1 - 3x > 0$ أي : $x < \frac{1}{3}$ ومنه : $x \in]-\infty, \frac{1}{3}[$ إذن : لكل x من IR_+^* يوجد x من $]-\infty, \frac{1}{3}[$ بحيث : $y = \varphi(x)$ وهذا يعني أن : $IR_+^* \subset \varphi(]-\infty, \frac{1}{3}[)$ خلاصة : $\varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$

ج- لنبين أن : $(]-\infty, \frac{1}{3}[, *)$ زمرة جزئية للزمرة $(IR - \{\frac{1}{3}\}, *)$ لدينا φ^{-1} تشاكل تقابلي من $(IR^*, \times)$ نحو $(E, *)$ إذن Ψ قصور φ^{-1} على IR_+^* هو أيضا تشاكل من $(E, *)$ نحو $(IR^*, \times)$ و $\Psi(IR_+^*) = \varphi^{-1}(IR_+^*) =]-\infty, \frac{1}{3}[$ نعلم أن $(IR^*, \times)$ زمرة

إذن $(\Psi(IR_+^*), *)$ زمرة

وبما أن $(E, *) \subset (\Psi(IR_+^*), *)$ زمرة

فإن : $(]-\infty, \frac{1}{3}[, *)$ زمرة

ومنه المطلوب .

حل التمرين الثالث :

(1) لنحسب احتمال الحدثين : $(X = 2)$ و $(X = 3)$

● الحدث $(X = 2)$ هو حدث : « الحصول على كرتين من

نفس اللون » في السحبتين الأولى والثانية

ومنه : $p(X = 2) = \frac{1^2 + 3^2}{4^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$

● الحدث $(X = 3)$ هو حدث : « الحصول على كرة بيضاء في

السحبة الأولى و كرتين حمراوين في السحبتين الثانية والثالثة،

أو كرة حمراء في السحبة الأولى و كرتين في السحبتين الثانية

و الثالثة » .

$$p(X = 3) = \frac{1 + 3^2 + 3 \cdot 1}{4^3} = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$$

(2) لنبين أن : $p(X = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$

الحدث $(X = 2k)$ هو :

« الحصول على كرتين من نفس اللون في السحبتين $2k - 1$ و $2k$

إذن : $p(X = 2k) = \frac{1^{k-1} \cdot 3^{k-1} \cdot 1^2 + 1^{k-1} \cdot 3^{k-1} \cdot 3^2}{4^{2k}}$

$$= \frac{3^{k-1}(1 + 9)}{4^{2k}} = \frac{10 \cdot 3^{k-1}}{(16)^{k-1}}$$

$$= \frac{10}{16} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1}$$

$$p(X = 2k) = \frac{5}{8} \left(\frac{3}{16} \right)^{k-1} \quad \text{ومنه :}$$

ب- لنبين أن : $p(X = 2k + 1) = \left(\frac{3}{16} \right)^k$

الحدث $(X = 2k + 1)$ هو :

« الحصول على الكرتين من نفس اللون في السحبتين $2k + 1$ و $2k$

إذن : $p(X = 2k + 1) = \frac{1^k \cdot 3^k \cdot 1 + 1^k \cdot 3^k \cdot 3}{4^{2k+1}}$

$$= \frac{3^k(1 + 3)}{4 \cdot 4^{2k}} = \frac{3^k}{(16)^k} = \left(\frac{3}{16} \right)^k$$

حل التمرين الرابع :

(1) لنبين أن الدالة f متصلة في الصفر .

$$f(0) = 2$$

لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$$

و

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\ln(1 + 2x)}{2x}$$

$$= 2 = f(0)$$

● لدينا لكل $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$xT(yTz) = xT\left(y + z - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x + \left(y + z - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}$$

$$= x + y + z - \frac{2}{3}$$

$$(xTy)Tz = \left(x + y - \frac{1}{3}\right)Tz$$

$$= \left(x + y - \frac{1}{3}\right) + z - \frac{1}{3}$$

$$= x + y + z - \frac{2}{3}$$

$$xT(yTz) = (xTy)Tz$$

إذن :

ومن T قانون تجميعي في $\mathbb{R}$.

● لدينا لكل X من $\mathbb{R}$: $xT\frac{1}{3} = x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = x$

إذن $\frac{1}{3}$ هو العنصر المحايد لـ $(\mathbb{R}, T)$

● ليكن X من $\mathbb{R}$: لكل x' من $\mathbb{R}$

$$\text{لدينا : } xTx' = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x + x' - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow x' = \frac{2}{3} - x$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$ مماثل هو $x' = \frac{2}{3} - x$ بالنسبة للقانون T

خلاصة : $(\mathbb{R}, T)$ زمرة تبادلية .

ب- لنبين أن : $(\mathbb{R}, T, *)$ جسم تبادلي.

● لدينا $(\mathbb{R}, T)$ زمرة تبادلية عنصراها المحايد هو $\frac{1}{3}$

● ولدينا $(\mathbb{R}, \{\frac{1}{3}\}, *)$ زمرة تبادلية

● ولدينا لكل $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$x * (yTz) = x * \left(y + z - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x + \left(y + z - \frac{1}{3}\right) - 3x\left(y + z - \frac{1}{3}\right)$$

$$= x + y + z - \frac{1}{3} - 3xy - 3xz + x$$

$$= 2x + y + z - 3xy - 3xz - \frac{1}{3}$$

$$(x * y)T(x * z) = (x * y) + (x * z) - \frac{1}{3} \quad \text{و :}$$

$$= x + y - 3xy + x + z - 3xz - \frac{1}{3}$$

$$= 2x + y + z - 3xy - 3xz - \frac{1}{3}$$

$$x * (yTz) = (x * y)T(x * z)$$

ومن T القانون توزيعي بالنسبة لـ $(*)$ تبادلي في $\mathbb{R}$

خلاصة : $(\mathbb{R}, T, *)$ جسم تبادلي.

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -2$
 إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر و $f'_d(0) = -2$
 ولدينا أيضا لكل x من $]-\frac{1}{2}, 0[$
 يوجد عدد حقيقي b من $]x, 0[$ بحيث :

$$\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$$

 بما أن : $b \in]x, 0[$
 فإن : $\frac{-2}{1+2x} < \frac{-2}{1+2b} < -2$
 ومنه : $\frac{-2}{1+2x} < \frac{f(x) - f(0)}{x} < -2$
 وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{1+2x} = -2$
 فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -2$
 أي f قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 و $f'_g(0) = -2$
 خلاصة : f قابلة للاشتقاق في الصفر و $f'(0) = -2$
 (3) أ- لنبين أن f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $I - \{0\}$
 لدينا : الدالة : $u: x \rightarrow 1 + 2x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
 ومنه في كل نقطة من $I - \{0\}$
 ولكل x من $I - \{0\}$: $u(x) > 0$
 والدالة : $\ln(x) \rightarrow x$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$
 إن الدالة : $\ln(1+2x) \rightarrow x$ قابلة للاشتقاق في كل نقطة
 من $I - \{0\}$ ، وحيث أن الدالة $x \rightarrow x$
 قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $I - \{0\}$ ولا تنعدم . فإن
 الدالة f قابلة للاشتقاق في كل نقطة من $I - \{0\}$
 • حساب $f'(x)$ لكل x من $I - \{0\}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{1+2x} \cdot x - \ln(1+2x)}{x^2}$$

$$= \frac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$$
 وهذا المطلوب .
 ب- لنبين أن : $(\forall x \in I - \{0\}) ; g(x) < 0$
 لدينا g قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I ولكل x من I :

(لأن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$)
 ومنه المطلوب .
 (2) أ- حساب : $h_a(a)$ و $h_a(0)$
 لدينا :

$$h_a(x) = (\ln(1+2a) - 2a)x^2 - (\ln(1+2x) - 2x)a^2$$

$$h_a(a) = (\ln(1+2a) - 2a)a^2 - (\ln(1+2a) - 2a)a^2 = 0$$

$$h_a(0) = (\ln(1+2a) - 2a)0^2 - (\ln(1) - 2(0))a^2 = 0$$
 • استنتاج :
 لدينا h_a دالة قابلة للاشتقاق على المجال I ومنه قابلة للاشتقاق
 على المجال $[0, a]$ ، لأن : $[0, a] \subset I$ و $h_a(0) = h_a(a)$
 إذن حسب مبرهنة رول ، يوجد عدد حقيقي b محصور بين 0 و a
 بحيث : $h'_a(b) = 0$
 لدينا :

$$h'_a(x) = 2x[\ln(1+2a) - 2a] - \left[\frac{2}{1+2x} - 2\right]a^2$$

$$= 2x[\ln(1+2a) - 2a] + \frac{4a^2x}{1+2x}$$
 ومنه :

$$h'_a(b) = 0 \Leftrightarrow 2b[\ln(1+2a) - 2a] + \frac{4a^2b}{1+2b} = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2a) - 2a = \frac{-2a^2}{1+2b}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2a) - 2a}{a^2} = \frac{-2}{1+2b}$$
 (لأن $b \neq 0$) ومنه المطلوب .
 ب- لنستنتج أن f قابلة للاشتقاق في الصفر وأن $f'(0) = -2$
 لدينا لكل x من I بحيث : $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{\ln(1+2x)}{x} - 2}{x}$$

$$= \frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2}$$
 ولكل x من المجال $]0, +\infty[$ يوجد عدد حقيقي b من $]0, x[$
 بحيث : $\frac{\ln(1+2x) - 2x}{x^2} = \frac{-2}{1+2b}$
 ولدينا :

$$b \in]0, x[\Leftrightarrow 0 < b < x$$

$$\Leftrightarrow 1 < 1+2b < 1+2x$$

$$\Leftrightarrow -2 < \frac{-2}{1+2b} < \frac{-2}{1+2x}$$
 إذن : $-2 < \frac{f(x) - f(0)}{x} < \frac{-2}{1+2x}$
 وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{1+2x} = -2$

إذن المنحنى (C) يقبل مقارباً أفقياً معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$

ب- لنبين أنه : $f(\alpha) = 1$; $(\exists ! \alpha \in [1;2])$

نعتبر الدالة العددية h بحيث : $h(x) = f(x) - 1$; $x \in [1;2]$

لدينا h متصلة و تناقصية على $[1;2]$ لأن f متصلة

و تناقصية على I و $[1;2] \subset I$

ولدينا : $(3 > e)h(1) = \ln(3) - 1 > 0$

$(5 < e^2)h(2) = \frac{\ln(5) - 2}{2} < 0$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1;2]$ بحيث :

$h(\alpha) = 0$ (وذلك بتطبيق مبرهنة القيم الوسطية)

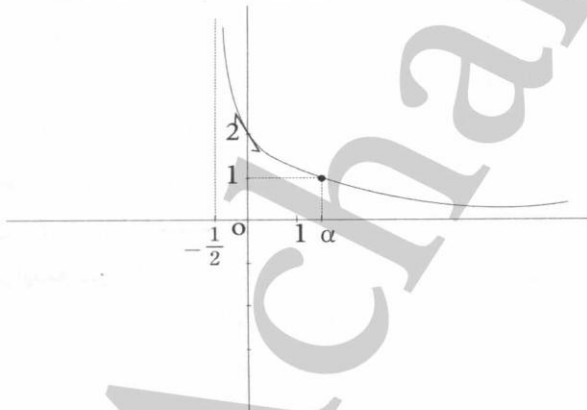
ومنه : $f(\alpha) = 1$; $(\exists ! \alpha \in [1;2])$

وهذا هو المطلوب.

ج- إنشاء (C) :

لدينا جدول تغيرات f هو :

x	$-\frac{1}{2}$	0	α	2	$+\infty$
$f'(x)$		(-2)	-		
$f(x)$		$+\infty$		1	0



II (1) أ- لنبين أن الدالة φ قابلة للاشتقاق على المجال $J = [1, \alpha]$ لدينا الدالة : $x \rightarrow 1 + 2x$ قابلة للاشتقاق على

المجال J ، و لكل x من J و $1 + 2x > 0$ ولدينا الدالة $\ln$ قابلة

للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$

إذن φ قابلة للاشتقاق على المجال J ، لكل x من المجال $[1, +\infty[$

$$g'(x) = 2 - [2\ln(1+2x) + 2]$$

$$= -2\ln(1+2x)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+2x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2\ln(1+2x) > 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2x) < 0$$

$$\Leftrightarrow x < 0$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$$

و جدول تغيرات الدالة g هو :

x	$-\frac{1}{2}$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	-
$g(x)$		0	

من خلال جدول تغيرات g نستنتج أن : $(\forall x \in I, g(x) \leq g(0))$

$$(\forall x \in I - \{0\}); g(x) < 0$$

ج- لنستنتج تغيرات الدالة f على I :

لدينا : $(\forall x \in I - \{0\}); f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(1+2x)}$

وبما أن : $(\forall x \in I - \{0\}); x^2(1+2x) > 0$

فإن إشارة $f(x)$ هي إشارة $g(x)$ حيث أن : $f'(0) = -2 < 0$

فإن : $(\forall x \in I), f'(x) < 0$

إذن f تناقصية قطعاً على المجال I .

(4) حساب النهايتين :

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{\ln(1+2x)}{x} = +\infty$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} x = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \ln(1+2x) = -\infty \end{array} \right. \text{ لأن : } \left. \begin{array}{l} x > -\frac{1}{2} \\ x > -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

ومنه المنحنى (C) يقبل مقارباً عمودياً معادلته $x = \frac{-1}{2}$ بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x+2x} \cdot \left(\frac{1+2x}{x} \right) = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2x)}{x+2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+2x}{x} = 2 \end{array} \right. \text{ لأن : } \left. \begin{array}{l} x > 0 \\ x > 0 \end{array} \right)$$

إذن بتطبيق متفاوتة التزايدات المنتهية على المجال الذي طرفاه

α و U_n نجد:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |\varphi(U_n) - \varphi(\alpha)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_n - \alpha|$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$$

• لنبين بالترجع أن: $\left(\frac{2}{3}\right)^n$

من أجل $n=0$ ، لدينا:

$$|U_0 - \alpha| = |1 - \alpha| \leq 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

(لأن: $1 \leq \alpha \leq 2$)

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{نفترض أن:}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{ولنبين أن:}$$

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{بما أن:}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha| \quad \text{و}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \quad \text{فإن:}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{إذن:}$$

وهذا المطلوب.

ج- استنتاج:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad \text{فإن} \quad \left|\frac{2}{3}\right| < 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \alpha \quad \text{ومنه:}$$

إذن $(U_n)_n$ متقاربة ونهايتها هي α

(III 1) أ- لنبين أن F قابلة للاشتقاق على المجال I .

$$\text{وأن } F'(x) = f(x)$$

لدينا F هي دالة أصلية لـ f على المجال I ومنه F قابلة

للاشتقاق على المجال I ، ولكل x من I .

$$F'(x) = f(x)$$

ب- منحى تغيرات F على I .

$$\text{لدينا: } (\forall x \in I) ; F'(x) = f(x)$$

$$\text{وبما أن: } (\forall x \in I) ; f(x) > 0$$

(حسب جدول تغيرات f)

$$\text{فإن: } (\forall x \in I) ; F'(x) > 0$$

وهذا يعني أن F دالة تزايدية قطعاً على المجال I .

$$\text{لدينا: } \varphi'(x) = \frac{2}{1+2x}$$

$$\text{بما أن: } x \geq 1 \quad \varphi'(x) = \frac{2}{1+2x} > 0$$

وحيث أن الدالة $x \rightarrow \frac{2}{1+2x}$ تناقصية على المجال $[1, +\infty[$

$$\text{فإن: } (\forall x \in [1, +\infty[) ; \varphi'(x) \leq \varphi'(1)$$

$$\text{أي: } \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{إذن: } (\forall x \geq 1) ; 0 < \varphi'(x) \leq \frac{2}{3}$$

ب- لنتحقق من أن:

$$\varphi(\alpha) = \alpha \quad \bullet$$

نعلم أن:

$$f(\alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(1+2\alpha)}{\alpha} = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+2\alpha) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \varphi(\alpha) = \alpha$$

ومنه المطلوب.

$$\bullet \quad \varphi(J) \subset J$$

بما أن φ دالة تزايدية على المجال $[1; \alpha]$

$$\text{فإن: } \varphi([1; \alpha]) = [\varphi(1); \varphi(\alpha)]$$

$$= [\ln(3); \alpha] \subset [1; \alpha]$$

$$\text{أي: } \varphi(J) \subset J$$

ومنه المطلوب.

(2) أ- لنبين بالترجع أن: $U_n \in J$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

من أجل $n=0$ ، لدينا $U_0=1$ ومنه: $U_0 \in J$

نفترض أن: $U_n \in J$ ولنبين أن: $U_{n+1} \in J$

بما أن: $U_n \in J$ (حسب الافتراض)

و φ تزايدية على المجال J و $\varphi(J) \subset J$

$$\text{فإن: } \varphi(U_n) \in \varphi(J)$$

$$\text{أي: } \varphi(U_n) \in J$$

$$\text{أي: } U_{n+1} \in J$$

ومنه: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \in J$

ب- لنبين أن: $\left(\frac{2}{3}\right)^n$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

• لدينا: φ قابلة للاشتقاق على J ولكل x من J : $|\varphi'(x)| \leq \frac{2}{3}$

$$\text{ولدينا: } (\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n \in J$$

$$\alpha \in J \quad \text{و:}$$

وهذا هو المطلوب.

ب- استنتاج :

لدينا X من I ، $F(x) - l \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

أي : $(\forall x \in I) ; \frac{F(x) - l}{x + \frac{1}{2}} \geq f(x)$

$(\forall x \in I) ; \frac{F(x) - F\left(-\frac{1}{2}\right)}{x + \frac{1}{2}} \geq f(x)$

وحيث أن : $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} f(x) = +\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{F(x) - F\left(-\frac{1}{2}\right)}{x + \frac{1}{2}} = +\infty$

وهذا يعني أن F غير قابلة للاشتقاق على اليمين في $\left(-\frac{1}{2}\right)$

(2) - لنبين أن : $(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$

لدينا :

$(\forall x \geq 1) ; F(x) = \int_0^1 f(t) dt + \int_1^x f(t) dt$

وبما أن f موجبة على $[0, 1]$ و $0 < 1$

فإن : $\int_0^1 f(t) dt \geq 0$

إذن : $(\forall x \geq 1) ; F(x) \geq \int_1^x f(t) dt$

ثم لدينا : لكل $t \geq 1$

$\ln(1+2t) > 0$ و $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{1+2t}$

إذن : $\frac{\ln(1+2t)}{t} \geq \frac{\ln(1+2t)}{1+2t}$

وبما أن $x \geq 1$ فإن :

$\int_1^x f(t) dt \geq \int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt$

ومنه المطلوب .

ب- لنستنتج أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

لدينا :

$\int_1^x \frac{\ln(1+2t)}{1+2t} dt = \left[\frac{1}{4} \ln^2(1+2t) \right]_1^x$

$= \frac{1}{4} \ln^2(1+2t) - \frac{1}{4} \ln^2(3)$

وحيث أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{4} \ln^2(1+2t) - \frac{1}{4} \ln^2(3) \right] = +\infty$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

(3) - لنبين أن :

$(\forall x \in I) ; F(x) - l \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

ليكن X من I ، الدالة $\bar{F}$ متصلة على المجال $\left[-\frac{1}{2}; x\right]$ وقابلة للاشتقاق على المجال $\left]-\frac{1}{2}; x\right[$ إذن حسب مبرهنة التزايد المتناهية، يوجد c من $\left]-\frac{1}{2}; x\right[$ بحيث :

$\bar{F}(x) - \bar{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = \bar{F}'(c)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

بما أن : $\bar{F}\left(-\frac{1}{2}\right) = l$ و $\bar{F}(x) = F(x)$

و $\bar{F}'(c) = F'(c) = f(c)$

و f تناقصية على المجال I ، فإن :

$(\forall x \in I) ; F(x) - l \geq f(x)\left(x + \frac{1}{2}\right)$

(لأن : $x + \frac{1}{2} > 0$ و $f(x) \geq f(c)$)