

ج- $M^{-1}(x)$ هو صورة مماثل x في $(IR, +)$

ب- أي صورة $(-x)$

إذن: $M^{-1}(x) = \varphi(-x) = M(-x)$

$$A^5 = M(2) \times M(2) \times \dots \times M(2) \quad -د$$

$$= M(2 + 2 + \dots + 2) = M(10)$$

$$A^5.X = B \Leftrightarrow M(10).X = M(12)$$

$$\Leftrightarrow M(-10).M(10).X = M(-10)M(12)$$

$$\Leftrightarrow X = M(2) = A$$

3- لدينا $F \neq \emptyset$

لأن: $M(\ln(1)) = M(0) = I \in F$

نعتبر $M(\ln(a))$ و $M(\ln(b))$ عنصرين من F

$$b \in R_+^* \text{ و } a \in R_+^*$$

$$M(\ln(a)) \times M(-1(\ln(b)))$$

$$= M(\ln(a)) \times M(-\ln(b))$$

$$= M(\ln(a) - \ln(b))$$

$$\left(\frac{a}{b} \in R_+^*\right) \text{ لأن } = M\left(\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) \in F$$

وبالتالي F زمرة جزئية للزمرة $(E, \times)$

التمرين الثاني:

$$a^2 - 4ia - 2 + 2i\sqrt{3} \quad -أ- 1$$

$$= [1 + i(2 - \sqrt{3})]^2 - 4i[1 + i(2 - \sqrt{3})]$$

$$- 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 2i(2 - \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{3})^2 - 4i$$

$$+ 4(2 - \sqrt{3}) - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 1 + 4i - 2i\sqrt{3} - 4 - 3 + 4\sqrt{3}$$

$$- 4i + 8 - 4\sqrt{3} - 2 + 2i\sqrt{3}$$

$$= 0$$

إذن a حل للمعادلة (E)

$$a + b = 4i \quad \text{ب- نعلم أن:}$$

$$b = 4i - a = 4i - 1 - i(2 - \sqrt{3})$$

Achamel.info

التمرين الأول:

1- ليكن $M(x)$ و $M(x')$ عنصرين من E

$$(x' \in IR, x \in IR)$$

$$M(x) \times M(x') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x' & 1 & 0 \\ x'^2 & 2x' & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x + x' & 1 & 0 \\ (x + x')^2 & 2(x + x') & 1 \end{pmatrix}$$

$$= M(x + x')$$

لدينا $M(x + x') \in E$

لأن $x + x' \in IR$

إذن E جزء مستقر في $(M_3(IR), \times)$

$$\varphi: IR \rightarrow E \quad -أ- 2$$

$$x \rightarrow \varphi(x) = M(x)$$

$$\varphi(x + x') = M(x + x')$$

$$= M(x) \times M(x')$$

$$= \varphi(x) \times \varphi(x')$$

إذن φ تشاكل من $(IR, +)$ نحو $(E, \times)$

$$\text{لدينا: } (\forall M \in E)(\exists !x \in IR): M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 2x & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{أي: } (\forall M \in E)(\exists !x \in IR): M = M(x)$$

$$\text{أي: } (\forall M \in E)(\exists !x \in IR): M = \varphi(x)$$

ومنه φ تقابل.

إذن φ تشاكل تقابلي من $(IR, +)$ نحو $(E, *)$

ب- بما أن $(IR, +)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل تقابلي من

$$(IR, +) \text{ نحو } (E, \times)$$

فإن $(E, \times)$ زمرة تبادلية.

$$\Omega C = |c - w| = |2e^{i\frac{\pi}{7}}| = 2 \quad \text{إذن :}$$

$$C \in (\Gamma) \quad \text{إذن :}$$

ج- لدينا $C \in (\Gamma)$ و $C \neq A$ و $C \neq B$

و $[AB]$ قطر لـ (Γ)

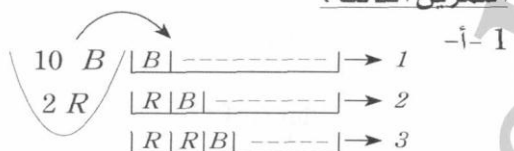
إذن الزاوية $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$ قائمة .

أي : $\text{Arg}\left(\frac{a-c}{b-c}\right)$ هو $\left(\frac{\pi}{2}\right)$ أو $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ بتحديد 2π

أي : $\frac{a-c}{b-c}$ تخيلي صرف

أي : $\frac{c-a}{c-b}$ تخيلي صرف

التمرين الثالث :



إذن قيم X هي : 1, 2, 3

$$p(X=1) = p(B) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{ب-}$$

$$p(X=2) = p(RB) = \frac{2 \times 10}{12 \times 11} = \frac{5}{33} \quad \text{ج-}$$

$$p(X=3) = p(RRB) = \frac{2 \times 1 \times 10}{12 \times 11 \times 10} = \frac{1}{66} \quad \text{د-}$$

2- أ- $E(X) = 1 \times \frac{5}{6} + 2 \times \frac{5}{33} + 3 \times \frac{1}{66} = \frac{13}{11}$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{5}{6} + 2^2 \times \frac{5}{33} + 3^2 \times \frac{1}{66} = \frac{52}{33}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{52}{33} - \left(\frac{13}{11}\right)^2 = \frac{65}{363}$$

$$= -1 + i(4 - 2 + \sqrt{3})$$

$$= -1 + i(2 + \sqrt{3})$$

$$a^2 = [1 + i(2 - \sqrt{3})]^2 \quad \text{2- أ-}$$

$$= 1 - (2 - \sqrt{3})^2 + 2i(2 - \sqrt{3})$$

$$= 1 - 4 - 3 + 4\sqrt{3} + 2i(2 - \sqrt{3})$$

$$= -6 + 4\sqrt{3} + 2i(2 - \sqrt{3})$$

$$= 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) + 2i(2 - \sqrt{3})$$

$$= 4(2 - \sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$$

$$= 4(2 - \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$a^2 = \left[4(2 - \sqrt{3}), \frac{\pi}{6}\right] \quad \text{ب- لدينا :}$$

$$a^2 = \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}\right] \quad \text{أي :}$$

$$a = \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \pi + \frac{\pi}{12}\right] \quad \text{أي :}$$

$$a = \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}\right] \quad \text{أو :}$$

$$a = \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{13\pi}{12}\right] \quad \text{أي :}$$

$$a = \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}\right] \quad \text{أو :}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) > 0 \text{ و } \text{Re}(a) > 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) < 0 \quad \text{و}$$

$$a = \left[2\sqrt{2 - \sqrt{3}}, \frac{\pi}{12}\right] \quad \text{فإن :}$$

3- أ- لدينا Ω هو منتصف $[AB]$

$$w = \frac{a+b}{2} = \frac{4i}{2} = 2i \quad \text{إذن :}$$

ب- شعاع الدائرة (Γ) هو : $\frac{AB}{2}$

$$\text{أي : } \frac{|b-a|}{2} \text{ أي } \frac{\sqrt{16}}{2} \text{ أي } 2$$

$$\Omega O = |o - w| = |2i| = 2 \quad \text{لدينا}$$

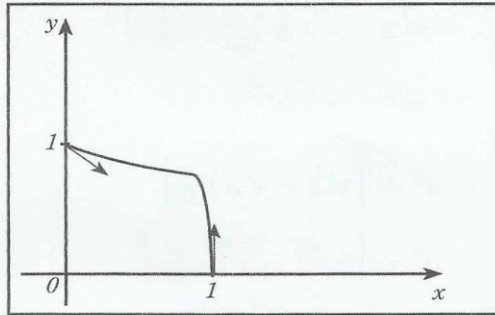
$$O \in (\Gamma)$$

x	$-\infty$	$1-e$	2	$\frac{e-1}{e}$	1
$1-(\ln(1-x))^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

x	0	$\frac{e-1}{e}$	1
$f''(x)$	$+$	0	$-$

$f''(x)$ تتعدم مع تغير الإشارة في $\frac{e-1}{e}$

إذن المنحنى يقبل نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{e-1}{e}$



5- نعتبر الدالة g المعرفة على I بـ $g(x) = f(x) - x$

لدينا g متصلة و تناقصية قطعاً على I لأنها مجموع دالتين

متصلتين و تناقصيتين قطعاً على I و $g(0) \times g(1) < 0$

لأن $g(1) = -1 < 0$ و $g(0) = 1 > 0$

إذن يوجد عدد حقيقي وحيد α من I

بحيث $g(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$

6- لدينا f متصلة و تناقصية قطعاً على I .

إذن f تقابل من I نحو $f(I)$ أي من I نحو I

لأن $f(I) = I$

$$\begin{aligned} f^{-1}: I - \{0\} &\rightarrow I - \{1\} \\ x &\rightarrow f^{-1}(x) = y \\ 0 &\rightarrow f^{-1}(0) = 1 \end{aligned}$$

(لكل x من $(I - \{0\})$)

مسألة :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(t) = -\infty \quad -1-I$$

بوضع $(t=1-x)$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - \ln(1-x)) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1 - \ln(1-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(1)$$

إذن f متصلة على اليسار في I .

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)(1 - \ln(1-x))}$$

بوضع $(t=1-x)$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{-t + t \ln(t)} = -\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t \ln(t) = 0^- \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} -t = 0^- \quad \text{و:}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليسار في I .

$$(\forall x \in [0, 1[): f'(x) = \frac{1}{(x-1)(1 - \ln(1-x))^2}$$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1$: $x-1 < 0$: $x < 1 \Rightarrow x-1 < 0$

x	0	1
$f'(x)$	$-$	$+\infty$
$f(x)$	1	0

$$f''(x) = \frac{1 - (\ln(1-x))^2}{(x-1)^2 (1 - \ln(1-x))^4} \quad -1-4$$

إشارة $f''(x)$ هي إشارة البسط

$$1 - (\ln(1-x))^2 = 0 \Leftrightarrow (\ln(1-x))^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-x) = 1 \text{ أو } \ln(1-x) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1-x = e \text{ أو } 1-x = \frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = 1-e \text{ أو } x = 1-\frac{1}{e}$$

$$\Leftrightarrow x = 1-e \notin I \text{ أو } x = \frac{e-1}{e} \in I$$

حسب مصاديق التقارب .

$$\begin{aligned}
 F(x) - S_n(x) &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \sum_{k=0}^n F_k(x) \quad -1-III \\
 &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - F_0(x) - F_1(x) - \dots - F_n(x) \\
 &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt - \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt \\
 &\quad - \dots - \int_0^x t^n f(t) dt \\
 &= \int_0^x \frac{1 - (1-t)(1+t+\dots+t^n)}{1-t} f(t) dt \\
 &= \int_0^x \frac{1 - (1-t)\left(\frac{1-t^{n+1}}{1-t}\right)}{1-t} f(t) dt \\
 &= \int_0^x \frac{1 - (1-t^{n+1})}{1-t} f(t) dt \\
 &= \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} f(t) dt \\
 &= \int_0^x \frac{t^{n+1} f(t)}{1-t} dt
 \end{aligned}$$

2-أ- نعتبر الدالة h المعرفة على J بـ :

$$\begin{aligned}
 h(x) &= (1-x)(1-\ln(1-x)) \\
 h'(x) &= (1-x)'(1-\ln(1-x)) \\
 &\quad + (1-x)(1-\ln(1-x))' \\
 &= -(1-\ln(1-x)) + (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \\
 &= -1 + \ln(1-x) + 1 = \ln(1-x) \\
 0 \leq x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq -x \leq 0 \\
 &\Rightarrow 0 < 1-x \leq 1
 \end{aligned}$$

إذن $\ln(1-x) \leq 0$ وينعدم مرة واحدة في O .

إذن h تناقصية قطعاً على J .

ب- لدينا : $x \in J$

لكل t من $[0, x]$ لدينا :

$$\frac{f(t)}{1-t} = \frac{1}{(1-t)(1-\ln(1-t))} = \frac{1}{h(t)}$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\ln(1-y)} = x$$

$$\Leftrightarrow 1-\ln(1-y) = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-y) = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1-y) = \frac{x-1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 1-y = e^{\frac{x-1}{x}}$$

$$\Leftrightarrow y = 1 - e^{\frac{x-1}{x}}$$

ومنه :

$$f^{-1} \begin{cases} f^{-1}(x) = 1 - e^{\frac{x-1}{x}} : 0 < x \leq 1 \\ f^{-1}(0) = 1 \end{cases}$$

II-1- لدينا : $0 \leq f(t) \leq 1$ و $0 \leq t \leq 1$

لأن $f(1) = 1$

إذن :

$$0 \times t^n \leq t \times t^n \leq 1 \times t^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^{n+1} \leq t^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq t^{n+1} f(t) \leq t^n f(t)$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^{n+1} f(t) dt \leq \int_0^1 t^n f(t) dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_{n+1} \leq I_n$$

إذن (I_n) تناقصية ومصفورة بالصفر ومنه (I_n) متقاربة .

2- لدينا : $0 \leq t \leq 1$ و $0 \leq f(t) \leq 1$

$$\Rightarrow 0 \leq t^n f(t) \leq t^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 t^n f(t) dt \leq \int_0^1 t^n dt$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

وبما أن :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0 \quad \text{فإن :}$$

ب-نضع : $1-x=t$

$x \rightarrow 1^- \Rightarrow 1 \rightarrow 0^+$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |1 - \ln(1-x)| = +\infty$

$\lim_{t \rightarrow 0^+} \ln(1 - \ln(t)) = +\infty$ لأن :

وبما أن h تناقصية قطعاً على $[0, x]$

لأن $J \subset [0, x]$ فإن مقلوبها $\frac{1}{h}$ دالة تزايدية قطعاً على $[0, x]$

3-أ- $0 \leq t \leq x$

$\Rightarrow \frac{1}{h(0)} \leq \frac{1}{h(t)} \leq \frac{1}{h(x)}$

لأن $\frac{1}{h}$ تزايدية على $[0, x]$

$\Rightarrow 1 \leq \frac{f(t)}{1-t} \leq \frac{f(x)}{1-x} \leq \frac{1}{1-x}$

لأن $f(x) \leq 1$ و $\frac{1}{1-x} > 0$

وبما أن : $t^{n+1} \geq 0$ فإن :

$0 \leq \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} \leq \frac{1}{1-x} t^{n+1}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x \frac{t^{n+1}f(t)}{1-t} dt \leq \int_0^x \frac{1}{1-x} t^{n+1} dt$

$\Rightarrow 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{1-x} \left[\frac{1}{n+2} t^{n+2} \right]_0^x$

لأن $x^{n+2} < 1$ لأن $0 \leq x \leq 1$

و $(1-x)(n+2) > 0$

خلاصة :

$\Rightarrow 0 \leq F(x) - S_n(x) \leq \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{1-x} \right)$

ب- لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{1-x} \right) = 0$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (F(x) - S_n(x)) = 0$

حسب مصاديق التقارب .

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = F(x)$

4-أ- $F(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1-t} dt$

$= \int_0^x \frac{1}{1 - \ln(1-t)} dt$

$= \int_0^x \frac{(1 - \ln(1-t))'}{1 - \ln(1-t)} dt$

$= [\ln |1 - \ln(1-t)|]_0^x$

$F(x) = \ln |1 - \ln(1-x)|$