

عنصر من $\mathbf{Z}$ مماثلا بالنسبة لـ $*$.
 إذن : $(\mathbf{Z}, *)$ زمرة تبادلية .
 2- لدينا :
 $(\forall (x, y) \in \mathbf{Z}^2) ; xTy = xy - 2x - 2y + 6$
 $(\forall x \in \mathbf{Z}) ; f(x) = x + 2$
 أ- لنبين أن f تشاكل تقابلي من $(\mathbf{Z}, \times)$ نحو $(\mathbf{Z}, T)$
 ليكن x و y من $\mathbf{Z}$
 لنبين أن :
 $f(xy) = f(x) T f(y)$
 لدينا :
 $f(xy) = xy + 2$
 ولدينا :
 $f(x) T f(y) = (x + 2) T (y + 2)$
 $= (x + 2)(y + 2) - 2(x + 2) - 2(y + 2) + 6$
 $= xy + 2x + 2y + 4 - 2x - 4 - 2y - 4 + 6$
 $= xy + 2$
 أي :
 $f(xy) = f(x) T f(y)$
 ومنه فالتطبيق f تشاكل من $(\mathbf{Z}, \times)$ إلى $(\mathbf{Z}, T)$
 وبما أن التطبيق f تقابل من $\mathbf{Z}$ نحو $\mathbf{Z}$
 $(\forall y \in \mathbf{Z} \exists ! x \in \mathbf{Z} / f(x) = y)$
 فإن f تشاكل تقابلي من $(\mathbf{Z}, \times)$ إلى $(\mathbf{Z}, T)$
 ب- إثبات المتساوية المقترحة : $(\forall (x, y, z) \in \mathbf{Z}^3)$
 لدينا :
 $(x * y) Tz = (x + y - 2) Tz$
 $= (x + y - 2)z - 2(x + y - 2) - 2z + 6$
 $= xz + yz - 2z - 2x + 2y + 4 - 2z + 6$
 $(1) \quad (x * y) Tz = xz + yz - 4z - 2x - 2y + 10$
 من جهة أخرى : لدينا :
 $(xTz) * (yTz) = (xTz) + (yTz) - 2$
 $(xTz) * (yTz) = (xz - 2x - 2z + 6)$
 $+ (yz - 2y - 2z + 6) - 2$
 $= xz - 2x - 2z + 6 + yz + 2y - 2z + 6 - 2$
 $(xTz) * (yTz) = xz + yz - 4z - 2x - 2y + 10$
 من (1) و (2) نستنتج أن :
 $(x * y) Tz = (xTz) * (yTz)$
 ومنه المطلوب .

Achamel.info

التمرين الأول :

$(\forall (x, y) \in \mathbf{Z}^2) ; x * y = x + y - 2$
 1- لنبين أن القانون $*$ تبادلي وتجميعي :
 لدينا :
 $(\forall (x, y) \in \mathbf{Z}^2) ; x * y = x + y - 2$
 $= y + x - 2$
 $= y * x$
 إذن القانون $*$ تبادلي .
 ليكن x و y و z من $\mathbf{Z}$ لدينا :
 $(x * y) * z = (x + y - 2) * z$
 $= (x + y - 2) + z - 2$
 $= x + (y + z - 2) - 2$
 $= x + (y * z) - 2$
 $= x * (y * z)$
 إذن القانون $*$ تجميعي .
 ب- لنبين أن : $(\mathbf{Z}, *)$ يقبل عنصرا محايدا .
 لنرمز له بـ e
 ليكن x من $\mathbf{Z}$ حيث :
 $x * e = x$
 يعني :
 $x + e - 2 = x$
 أي :
 $e - 2 = 0$
 ومنه :
 $e = 2$
 إذن $(\mathbf{Z}, *)$ يقبل عنصرا محايدا هو 2 .
 ج- لنبين أن لكل عنصر من $\mathbf{Z}$ يقبل مماثلا بالنسبة للقانون $*$.
 ليكن x من $\mathbf{Z}$ لنحدد x' من $\mathbf{Z}$ بحيث :
 $x * x' = 2$
 $x + x' - 2 = 2$
 يعني :
 $x' = -x + 4$
 ومنه :
 $x \in \mathbf{Z} \Rightarrow x' \in \mathbf{Z}$
 وبالتالي : فإن لكل x من $\mathbf{Z}$ مماثلا هو $(-x + 4)$ بالنسبة
 للقانون $*$.
 خلاصة : القانون $*$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا ولكل

إذا كان $x=5$ فإن $x' = \frac{7}{3}$ و $\frac{7}{3} \in Z$ إذن $(Z, *, T)$ ليس جساما .

التمرين الثاني :

ليكن $a \in \mathbb{C}^*$

نعتبر C المعادلة :

$$(E): 2Z^2 - (3 + i\sqrt{3})aZ + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

1- ليكن Δ مميز المعادلة (E) :

$$\Delta = (3 + i\sqrt{3})^2 a^2 - 4(2)(1 + i\sqrt{3})a^2$$

$$\Delta = [(3 + i\sqrt{3})^2 - 8(1 + i\sqrt{3})]a^2$$

$$\Delta = (9 + 6i\sqrt{3} - 8 - 8i\sqrt{3})a^2$$

$$= (1 - 2i\sqrt{3} - 3)a^2$$

$$= (1 - 2i\sqrt{3} + (i\sqrt{3})^2)a^2 = (-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$$

$$\Delta = (-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$$

أي :

ومنه المطلوب .

2- لنحل في C المعادلة (E) : ليكن Z_1 و Z_2 حلي المعادلة (E) .

$$Z_1 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (-1 + i\sqrt{3})a}{4}$$

$$= \frac{(3 + i\sqrt{3} - 1 + i\sqrt{3})a}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a$$

$$Z_2 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a - (-1 + i\sqrt{3})a}{4}$$

$$= \frac{(3 + i\sqrt{3} + 1 - i\sqrt{3})a}{4} = a$$

ومنه مجموعة حلول المعادلة (E) : $S = \left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)a, a\right\}$

II- لدينا $A(a)$ و $B(b)$ و $M(Z)$ حيث $b = ae^{i\frac{\pi}{3}}$

1- لنتحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع :

لدينا : $OA = |Z_A - Z_O| = |a|$

$$(|e^{i\frac{\pi}{3}}| = 1) \quad OB = |Z_B - Z_O| = |b| = |ae^{i\frac{\pi}{3}}|$$

$$= |a| \cdot |e^{i\frac{\pi}{3}}| = |a|$$

$$OA = OB$$

إذن

3- الاستنتاج :

التطبيق f تشاكل تقابلي من $(Z, \times)$ نحو (Z, T)

و القانون $\times$ تبادلي و تجميعي إذن القانون T تبادلي و تجميعي

أيضا و القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$.

و العنصر المحايد e' لـ (Z, T) هو صورة العنصر المحايد 1

لـ $(Z, \times)$

$$e' = f(1) = 1 + 2 = 3$$

ولدينا $(Z, *)$ زمرة تبادلية

إذن $(Z, *, T)$ حلقة واحدة تبادلية

$$4- \forall (x, y) \in Z \quad xTy = 2$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 0 \text{ أو } y - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } y = 2$$

ب- الاستنتاج :

لدينا : $xTy = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ أو } y = 2$

(2 هو العنصر المحايد لـ $(Z, *)$)

إذن الحلقة $(Z, *, T)$ لا تقبل قواسم الصفر .

إذن الحلقة $(Z, *, T)$ كاملة .

ج- ليكن x من Z حيث $x \neq 2$.

هل x يقبل مماثل بالنسبة للقانون T

ليكن x' من Z حيث $xTx' = 3$

$$xx' - 2x - 2x' + 6 = 3$$

يعني :

$$xx' - 2x - 2x' + 3 = 0$$

يعني :

$$(x \neq 2) \quad x'(x - 2) = 2x - 3$$

ومنه :

$$x' = \frac{2x - 3}{x - 2}$$

إذن :

$$\frac{2x - 3}{x - 2} \in Z \text{ إذا وفقط إذا كان } x' \in Z$$

وهذا غير محقق فإن : $\forall x \in Z - \{2\}$

ومنه $Z_{OA_1} = Z_{B_1M}$ ولدينا

ومنه الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع .

- إثبات المتساوية المقترحة :

لدينا :

$$\frac{Z - b_1}{Z - a_1} = \frac{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z}{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}a + Z\right)}{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(Z - a)}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + Z\right]}{Z - a}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left[\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + Z\right]}{Z - a}$$

$$\frac{Z - b_1}{Z - a_1} = \frac{a + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z}{Z - a}$$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - a}{Z - a} \quad (\alpha)$$

من جهة أخرى لدينا :

$$\frac{Z - b}{Z - a} \times \frac{a}{b} = \frac{Z - a e^{-i\frac{\pi}{3}}}{Z - a} \times \frac{a}{a e^{-i\frac{\pi}{3}}}$$

$$= \frac{Z - a e^{-i\frac{\pi}{3}}}{(Z - a)e^{-i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} Z - a}{Z - a}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z - a}{Z - a} \quad (\beta)$$

من (α) و (β) نستنتج أن :

$$\frac{Z - b_1}{Z - a_1} = -\frac{Z - b}{Z - a} \times \frac{a}{b}$$

ب- لدينا $\frac{Z_M - Z_{B_1}}{Z_M - Z_{A_1}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ مستقيمة $B_1 A_1 M$

ومنه $\frac{Z - b_1}{Z - a_1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{Z - b}{Z - a} \times \frac{a}{b} \in \mathbb{R}$

ولدينا $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \arg\left(\frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O}\right)[2\pi]$

$$\equiv \arg\left(\frac{ae^{i\frac{\pi}{3}}}{a}\right)[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

إذن المثلث OAB متساوي الأضلاع .

2- أ- إثبات المتساويتين المقترحتين :

لدينا : $A_1 = r^{-1}(A)$

يعني : $a_1 - Z = e^{-i\frac{\pi}{3}}(a - Z)$

ومنه : $a_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}a + (1 - e^{-i\frac{\pi}{3}})Z$

أي : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$

أي : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$

ومنه المطلوب .

لدينا : $B_1 = r(B)$

يعني : $b_1 - Z = e^{i\frac{\pi}{3}}(b - Z)$

ومنه : $b_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}b + (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})Z$

أي : $b_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}a e^{i\frac{\pi}{3}} + (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})Z$

$$= a e^{\frac{2i\pi}{3}} + (1 - e^{i\frac{\pi}{3}})Z$$

ومنه $b = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$

ومنه المطلوب .

ب- إثبات أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع

لدينا : $Z_{OA_1} = Z_{A_1} = a_1$

$Z_{B_1M} = Z_M - Z_{B_1} = Z - b_1$

$$Z - b_1 = Z - \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z$$

$$= \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)Z = a_1$$

إذن: $n \wedge (p-1) = 1$
 ومنه حسب مبرهنة BEZOUT :
 $\exists (u,v) Z^2 / un + v(p-1) = 1$
 نضع $u=a$ و $b=-v$
 إذن $\exists (a,b) Z^2 / an - b(p-1) = 1$
 ومنه المطلوب .
 د- ليكن r و q باقي وخارج القسمة الأقليدية لـ a على $(p-1)$
 يعني: $a = q(p-1) + r$ مع $0 \leq r < p-1$
 ومنه: $r = a - q(p-1)$
 ومنه: $rn = an - qn(p-1)$
 ولدينا: $an - b(p-1) = 1$
 يعني: $an = 1 + b(p-1)$
 ومنه: $rn = 1 + b(p-1) - qn(p-1)$
 أي: $rn = 1 + (p-1)(b - qn)$
 ومنه: $rn - 1 = (p-1)(b - qn)$
 لدينا: $p-1 > 0$ إذن $p \geq 5$
 لنبين أن $rn - 1 \geq 0$ أي $rn \geq 1$
 لدينا $r \neq 0$ لأنه إذا كان $r=0$
 فإن $a = q(p-1)$ أي $a \equiv 0 \pmod{p-1}$
 وحيث أن $an - b(p-1) = 1$
 فإن: $p-1 \mid 1$ أي $p-1=1$ ومنه $p=2$
 وهذا غير ممكن لأن $p \geq 5$ ومنه $r \neq 0$
 ومنه $r \geq 1$ وحيث $n > 1$
 فإن $rn > 1$ ومنه $(b - qn) \in \mathbb{N}^*$
 بوضع $k = b - qn$ فإن $k \in \mathbb{N}^*$
 و $rn = 1 + k(p-1)$ ومنه المطلوب .
 2- نفترض أنه يوجد n بحيث $3^n - 2^n \equiv 0[n]$
 إذن حسب ما سبق لدينا :
 $3^{p-1} \equiv 1[P]$ و $2^{p-1} \equiv 1[P]$
 أي $3^{k(p-1)} \equiv 1[P]$ و $2^{k(p-1)} \equiv 1[P]$
 ومنه $3^{k(p-1)+1} \equiv 3[P]$ و $2^{k(p-1)+1} \equiv 2[P]$

$\Leftrightarrow \frac{Z-b}{Z-a} \times \frac{a-0}{b-0} \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A} \times \frac{Z_A - Z_O}{Z_B - Z_O} \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow \frac{Z_M - Z_B}{Z_M - Z_A} : \frac{Z_B - Z_O}{Z_A - Z_O} \in \mathbb{R}$
 (إذن النقط B, A, O, M متداورة أو مستقيمية)
 علما أن النقط B, A, O, M غير مستقيمية حسب ما سبق
 (III) فإنها متداورة وهذا هو المطلوب .

التمرين الثالث :

1-أ- لدينا $n > 1$ و $3^n - 2^n \equiv 0[n]$
 إذن $n / 3^n - 2^n$
 وحيث أن p/n ومنه (بالتعدي) $p / 3^n - 2^n$
 وبالتالي $3^n - 2^n \equiv 0[P]$
 بما أن $3^2 - 2^2 \equiv 0[2]$ و $3^3 - 2^3 \equiv 0[3]$
 و $p / 3^n - 2^n$ و p أولي إذن $p \geq 5$
 ب- بما أن p عدد أولي و $p \geq 5$
 فإن $p \wedge 3 = 1$
 ومنه حسب مبرهنة فيرما (Fermat) $2^{p-1} \equiv 1[P]$
 $3^{p-1} \equiv 1[P]$
 ج- نضع $d = n \wedge (p-1)$ ونفترض أن $d \neq 1$
 إذن يوجد عدد أولي q موجب حيث: q/d
 بما أن: q/d و d/n فإن q/n
 وحيث أن q/d و $d/p-1$ فإن $q/p-1$
 إذن: $q \leq p-1 < p$
 ومنه q/n و q أولي أصغر من p
 وهذا يتناقض مع كون p أصغر عدد أولي موجب يقسم n
 ومنه $d=1$

$\ln x - x + 1 < 0$

$\ln x < x - 1$ أي :
ومنه المطلوب .

$\forall x > 0 \quad h'(x) = \frac{(x-1)'x \ln x - (x-1)(x \ln x)'}{(x \ln x)^2}$

$$= \frac{x \ln x - (x-1) \cdot (\ln x + 1)}{x^2 \ln^2 x}$$

$$= \frac{x \ln x - x \ln x - x + \ln x + 1}{x^2 \ln^2 x}$$

$$= \frac{\ln x - x + 1}{x^2 \ln^2 x}$$

لدينا
أي
ومنه

$\forall x > 1 \quad \ln x < x - 1$
 $\ln x - x + 1 < 0$
 $h'(x) < 0$

إذن h تناقصية قطعاً على $]1, +\infty[$

لدينا
أي
ومنه

$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x \ln x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right) \times \frac{1}{\ln x} = 0$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1$

ومنه جدول تغيرات الدالة h

x	1	$+\infty$
$h'(x)$		-
$h(x)$	1	0

ب- الاستنتاج : من خلال جدول تغيرات الدالة h

لدينا : $h([1, +\infty[) =]0, 1]$

إذن : $\forall x \geq 1 \quad 0 < h(x) \leq 1$

الجزء الثاني :

$(\forall x > 1); g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$ و $g(1) = \ln 2$

1- أ- إثبات المتساوية المقترحة :

$\forall x > 1 \quad \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} \frac{1}{t} dt = \int_x^{x^2} \frac{\ln' t}{\ln t} dt$

$3^{rn} \equiv 3[P] \quad \text{و} \quad 2^{rn} \equiv 2[P]$ يعني

$3^{rn} - 2^{rn} \equiv 1[P]$ يعني

ولدينا $3^n \equiv 2^n[P]$ أي $3^n - 2^n \equiv 0[P]$

$3^{rn} - 2^{rn} \equiv 0[P]$ فإن :

يعني : $r \equiv 0[P]$ أي $p/1$ ومنه $p=1$ وهذا تناقض .

مسألة :

الجزء الأول :

لدينا - $\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} & x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$

1- أ- لنبين أن h متصلة على اليمين في 1 .

لنحسب : $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x)$

لدينا : $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x \left(\frac{\ln x}{x-1} \right)}$

$$= 1 = h(1)$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{x-1} = 1$)

إذن h متصلة على اليمين في 1 .

ب- نضع : $\forall x \geq 1 \quad t(x) = \ln x - x + 1$

لدينا : $t(1) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) + 1 = -\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\forall x \geq 1 \quad t'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \leq 0$

ومنه جدول تغيرات الدالة t

x	1	$+\infty$
$t'(x)$	0	-
$t(x)$	0	$-\infty$

(t تناقصية قطعاً على $]1, +\infty[$)

$\forall x > 1 ; t(x) < t(1)$

لدينا h متصلة على المجال $[1, +\infty[$ وخصوصا على

$$\forall x > 1 \quad [\sqrt{x}, x] \text{ المجال}$$

القيمة المتوسطة للدالة h على المجال $[\sqrt{x}, x]$ هي :

$$M = \frac{1}{x - \sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^x h(t) dt$$

و h تناقصية قطعيا على $[1, +\infty[$ ومنه على المجال

$$[\sqrt{x}, x]$$

$$h(x) \leq M \leq h(\sqrt{x}) \quad \text{ومنه :}$$

$$h(x) \leq \frac{1}{x - \sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^x h(t) dt \leq h(\sqrt{x}) \quad \text{أي :}$$

$$(x - \sqrt{x} > 0 ; \forall x > 1) \quad \text{أي :}$$

$$(x - \sqrt{x})h(x) \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(t) dt \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) \quad \text{أي :}$$

$$(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

ب- الاستنتاج :

$$\forall x > 1$$

$$(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

$$(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - g(1) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) \quad \text{أي :}$$

$$\frac{(x - \sqrt{x})h(x)}{x - 1} \leq \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \leq \frac{(x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x - 1} \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - \sqrt{x})h(x)}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})}{x - 1}$$

$$x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$$

$$\forall x > 1 \quad x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \quad \text{و}$$

ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} h(x) \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} h(\sqrt{x})$$

لدينا h متصلة على اليمين في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} h(\sqrt{x}) = h(1) = 1$$

(الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ متصلة على $[0, +\infty[$)

$$\frac{1}{2} \leq \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} \leq \frac{1}{2} \quad \text{إذن}$$

$$= [\ln |\ln t|]_x^{x^2}$$

$$= \ln |\ln(x^2)| - \ln |\ln x| \quad (x > 1 \Leftrightarrow \ln x > 0)$$

$$= \ln(\ln x^2) - \ln(\ln x)$$

$$= \ln\left(\frac{2 \ln x}{\ln x}\right)$$

$$= \ln 2$$

ومنه المطلوب .

$$\forall x > 1 ; g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \ln 2 \quad \text{ب-}$$

$$= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \quad \text{أي :}$$

$$= \int_x^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \quad \text{ومنه :}$$

$$g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt \quad \text{وبالتالي :}$$

ومنه المطلوب .

$$\forall x > 1 \quad g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt \quad \text{ج- لدينا}$$

$$t = \alpha^2 \quad \text{يعني} \quad \alpha = \sqrt{t} \quad \text{نضع :}$$

$$\alpha = \sqrt{x} \quad \text{فإن} \quad t = x \quad \text{إذا كان}$$

$$\alpha = x \quad \text{فإن} \quad t = x^2 \quad \text{إذا كان}$$

$$t = \alpha^2 \quad \text{إذن} \quad \frac{dt}{d\alpha} = 2\alpha \quad \text{ومنه} \quad dt = 2\alpha d\alpha$$

$$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 \ln(\alpha^2)} 2\alpha d\alpha \quad \text{ومنه :}$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\alpha - 1}{2\alpha^2 \ln \alpha} 2\alpha d\alpha$$

$$= \int_{\sqrt{x}}^x \frac{\alpha - 1}{\alpha \ln \alpha} d\alpha$$

$$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t - 1}{t \ln t} dt$$

أي :

2- لنبين أن :

$$(\forall x > 1) ;$$

$$(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$$

$$g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{t - 1}{t \ln t} dt = \int_{\sqrt{x}}^x h(t) dt \quad \text{لدينا :}$$

3- إثبات أن الدالة g قابلة للاشتقاق على $[1, +\infty[$ وأن $\forall x > 1 \quad g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$ لدينا $\forall x > 1 \quad g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt$ لدينا الدالة: $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{t} \ln t}$ متصلة على $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ إذن متصلة خصوصا على المجال $]1, +\infty[$ إذن متصلة على أي مجال من النوع $[x, x^2]$ حيث $x > 1$ إذن تقبل دوال أصلية على المجال $[x, x^2]$ ومنه الدالة g قابلة للاشتقاق على $]1, +\infty[$ ولدينا: $\forall x > 1 \quad g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2} \ln x^2} (x^2)' - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} (x)'$ أي: $= \frac{2x}{2x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$ أي: $= \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$ أي: $= \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \cdot \ln x} = \frac{\sqrt{x} - 1}{2 \cdot \sqrt{x} \ln \sqrt{x}}$ أي: $= \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right)$ وبالتالي: $g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$ ومنه المطلوب. ب- الاستنتاج: لدينا: $\forall x \geq 1 \quad 0 < h(x) \leq 1$ إذن: $(x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} > 1) \forall x \geq 1 \quad 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$ ومنه: $0 < \frac{1}{2}h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$ أي: $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ ولدينا $g'(1) = \frac{1}{2}$ إذن: $\forall x \geq 1 \quad 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$ إذن الدالة g تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = \frac{1}{2}$ أي g قابلة للاشتقاق على اليمين في 1 و $g'(1) = \frac{1}{2}$ ب- لدينا: $\forall x > 1 \quad g(x) - \ln 2 \geq (x - \sqrt{x})h(x)$ أي: $g(x) \geq (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$ لنحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x)$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})(x - 1)}{x \ln x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{\ln x} \right) \cdot \left(\frac{x - 1}{x} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{x - 1}{x} \right)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{x} = 1$ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) = +\infty$ إذن: $g(x) \geq (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ إذن: ومنه المطلوب. ج- لدينا: $\forall x > 1 \quad (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 \leq g(x) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2$ $\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x} \right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x} \right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$ $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$ لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(\sqrt{x}) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln 2}{x} = 0$ إذن: $0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} \leq 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$ ومنه المطلوب.

إذن الدالة k تناقصية قطعاً على $[1, +\infty[$

$$k([1, +\infty[) =]\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x), k(1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{g(x)}{x} - 1 \right) + 1 = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$)

و $k(1) = g(1) - 1 + 1 = \ln 2$

إذن الدالة k تقابل من $[1, +\infty[$ إلى $] -\infty, \ln 2]$

لدينا $0 \in] -\infty, \ln 2]$

و k تقابل من $[1, +\infty[$ إلى $] -\infty, \ln 2]$

إذن : يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[1, +\infty[$

حيث $k(\alpha) = 0$ أي $k(\alpha) - \alpha + 1 = 0$ ومنه $g(\alpha) + 1 = \alpha$ ومنه المطلوب .

-II المتتالية المعرفة بـ :

$$n \geq 0 \quad U_{n+1} = 1 + g(U_n) \quad 1 \leq U_0 < \alpha$$

1- لنبين أن $\forall n \geq 0 \quad 1 \leq U_n < \alpha$

من أجل $n=0$ لدينا $1 \leq U_0 < \alpha$ خاصية محققة .

نفترض أن : $1 \leq U_n < \alpha$ ونبين أن $1 \leq U_{n+1} < \alpha$

لدينا : $1 \leq U_n < \alpha$ (حسب الافتراض)

و g تزايدية قطعاً على $[1, +\infty[$

إذن $g(1) \leq g(U_n) < g(\alpha)$

ومنه $g(1) + 1 \leq 1 + g(U_n) < g(\alpha) + 1$

ومنه $1 < \ln 2 + 1 \leq U_{n+1} < \alpha$

ومنه المطلوب .

ومنه حسب مبدأ البدهان بالترجع فإن :

$$\forall n \geq 0 \quad 1 \leq U_n < \alpha$$

ب- لنبين أن $(U_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .

$$\forall n \geq 0 \quad U_{n+1} - U_n = 1 + g(U_n) - U_n = k(U_n)$$

لدينا k تناقصية قطعاً على $[1, +\infty[$

ومنه جدول تغيراتها هو كالتالي :

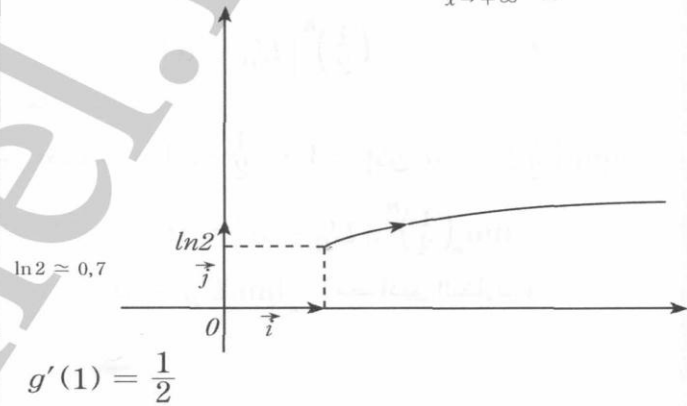
x	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

ج- إنشاء المنحنى :

$$g(1) = \ln 2 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

(C_g) يقبل شلجيميا إتجاهه محور الأفاصيل بحوار $+\infty$

($\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$)



معادلة المماس لـ (C_g) في النقطة ذات الأفصول 1 هي :

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \ln 2$$

الجزء الثالث :

$$I- \quad k : x \longrightarrow g(x) - x + 1$$

لدينا الدالة g متصلة على المجال $[1, +\infty[$

الدالة $x \longrightarrow -x + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ (دالة حدودية)

و خصوصاً على المجال $[1, +\infty[$

إذن الدالة k متصلة على $[1, +\infty[$

(كمجموع دالتين متصلتين على $[1, +\infty[$)

$$\forall x \geq 1 \quad k'(x) = g'(x) - 1$$

$$\forall x \geq 1 \quad 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{نعلم أن :}$$

$$\forall x \geq 1 \quad -1 < g'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{إذن :}$$

و لدينا $\forall n \geq 0 \quad U_n \geq 1$
 ومنه المتفاوتة المطلوبة : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$
 ب- لدينا :
 $\forall n \geq 0 \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$
 إذن :
 بجاء طرف بطرف ال n متفاوتة وبعد الاختزال نحصل على

$$\begin{cases} |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha| \\ |U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_1 - \alpha| \\ \vdots \\ |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha| \end{cases}$$

 $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$
 ومنه المطلوب .
 ج- الاستنتاج : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$
 ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |U_0 - \alpha| = 0$
 إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$ (مصاديق التقارب).

ولدينا $\forall n \geq 0 \quad 1 \leq U_n < \alpha$
 $k(\alpha) = 0$ و $k(U_n) > k(\alpha)$
 إذن $\forall n \geq 0 \quad k(U_n) > 0$
 إذن : $\forall n \geq 0 \quad U_{n+1} - U_n > 0$
 أي $(U_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .
 ج- المتتالية $(U_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً و مكبورة بالعدد α إذن متقاربة .
 - لنبين أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$
 نضع $l \geq 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l$
 إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = l$
 ولدينا : $\forall n \geq 0 \quad U_{n+1} = 1 + g(U_n)$
 يعني : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + g(U_n))$
 $l = 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} g(U_n)$
 علما أن الدالة g متصلة على المجال $[1, +\infty[$
 فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = l \in \mathbb{R}$
 فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(U_n) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n) = g(l)$
 إذن : $l = 1 + g(l)$ يعني $g(l) - l + 1 = 0$
 أي : $l = \alpha$ إذن $k(l) = 0$
 لأن α هو الحل الوحيد للمعادلة $k(x) = 0$
 على المجال $[1, +\infty[$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$
 2- أ- إثبات المتفاوتة المقترحة :
 لدينا : $\forall n \geq 0 \quad U_{n+1} - \alpha = 1 + g(U_n) - \alpha$
 $= (1 - \alpha) + g(U_n)$
 $= -g(\alpha) + g(U_n)$
 $U_{n+1} - \alpha = g(U_n) - g(\alpha)$
 $\left| \frac{U_{n+1} - \alpha}{U_n - \alpha} \right| = \left| \frac{g(U_n) - g(\alpha)}{U_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$
 لأن : $\forall n \geq 1 \quad g'(x) < \frac{1}{2}$