

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2010

التمرين رقم 1 :

1- لدينا : $\vec{AB}(4,0,-3)$ و $\vec{AC}(8,1,-6)$

إذن

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ -3 & -6 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= 3\vec{i} + 4\vec{k}$$

- المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

ومنه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكون على الشكل

$$C \in IR \quad 3x + 4z + c = 0$$

وبما أن $B \in (ABC)$

$$C = -9 \quad \text{فإن} \quad 4(3) + 4(0) + c = 0$$

وبالتالي $3x + 4z - 9 = 0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)

$$2- \text{أ- لدينا} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - 15 = 0$$

إذن معادلة الفلكة (S) تصبح

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 25 = (5)^2$$

ومنه النقطة $\Omega(3,1,0)$ مركز الفلكة (S) وشعاعها هو 5

3- أ- (Δ) عمودي على المستوى (ABC)

يعني أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ موجهة للمستقيم (Δ)

وبما أنه يمر من $\Omega(3,1,0)$ فإن

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in IR)$$

ب- لتكن $M(a,b,c)$ نقطة مشتركة بين (Δ) و (S) .

$$\begin{cases} a = 3 + 3t \\ b = 1 \\ c = 4t \end{cases}$$

لدينا

$$(a-3)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 25$$

$$(3+3t-3)^2 + (1-1)^2 + (4t)^2 = 25$$

$$25t^2 = 25 \quad \text{أي}$$

ومنه $t=1$ أو $t=-1$

في حالة $t=1$ نجد $a=6$ و $b=1$ و $c=4$

في حالة $t=-1$ نجد $a=0$ و $b=1$ و $c=4$

إذن مثلثا إحداثيات نقطتي التقاطع هما $E(6,1,4)$

و $F(0,1,-4)$

التمرين رقم 2 :

$$1- \text{مميز المعادلة هو} \quad \Delta = (6)^2 - 4(10) = 36 - 40$$

$$= (-2i)^2$$

ومنه حلها

$$z_2 = \frac{6-2i}{2} = 3-i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{6+2i}{2} = 3+i$$

$$2- \text{أ- لدينا} \quad M' = R(M) \quad \text{ومنه} \quad z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - a)$$

$$\text{أي} \quad z' - (3-i) = \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)(z - 3 + i)$$

$$z' = i(z - 3 + i) + 3 - i$$

$$= iz - 3i - 1 + 3 - i$$

$$= iz - 4i + 2$$

يعني

$$z' - a = i(c - a)$$

ب- لدينا

$$z' = (7-3i) - (3-i) + 3 - i$$

أي

$$z' = i(4-2i) + 3 - i$$

يعني

$$= 4i + 2 + 3 - i = 5 + 3i$$

وبالتالي $C'(5+3i)$

$$\text{ج- لدينا} \quad \frac{c' - b}{c - b} = \frac{5 + 3i - (3 + i)}{7 - 3i - (3 + i)} = \frac{2 + 2i}{4 - 4i}$$

$$= \frac{2(1+i)}{4(1-i)} = \frac{1(1+i)}{2}$$

$$= \frac{1+2i-1}{4} = \frac{1}{2}i = \left[\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

وبالتالي المثلث BCC' قائم الزاوية في B .

$$\left(\arg\left(\frac{c' - b}{c - b}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Leftrightarrow (\overline{BC}, \overline{BC'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]\right)$$

$$\text{كما أن} \quad \left|\frac{c' - b}{c - b}\right| = \left|\frac{1}{2}i\right| \quad \text{تكافئ} \quad \frac{BC'}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$BC = 2BC' \quad \text{وهذا يعني أن:}$$

التمرين رقم 3 :

1 - * للحصول على كرة حمراء واحدة فقط نسحب كرة من بين الثلاثة الحمراء و ثلاث كرات من بين السبع كرات الغير الحمراء

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^1 A_7^3}{C_{10}^4} = \frac{3 \cdot 3!4!}{10!} = \frac{1}{2}$$

* الحدث المضاد للحدث B هو عدم الحصول على أية كرة بيضاء لهذا نسحب 4 كرات من بين الخمس كرات غير البيضاء فتجد :

$$P(\bar{B}) = \frac{C_5^4}{C_{10}^4} = \frac{5}{210}$$

ومنه : $P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{5}{210} = \frac{205}{210} = \frac{41}{42}$

2 - أ- بما أن عدد الكرات الحمراء هو ثلاث كرات وبما أن السحب يكون لأربعة كرات فإن $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$

ب- * $(X=2)$ هو الحدث الحصول بالضبط على كرتين حمراوين

$$P(X=2) = \frac{\text{card}(X=2)}{\text{card}\Omega} = \frac{C_3^2 A_7^2}{C_{10}^4} = \frac{3 \cdot 2!5!}{10!} = \frac{3}{10}$$

* $(X=0)$ هو الحدث الحصول على أربعة كرات غير حمراء

$$P(X=0) = \frac{\text{card}(X=0)}{\text{card}\Omega} = \frac{A_7^4}{C_{10}^4} = \frac{3!4!}{10!} = \frac{1}{6}$$

$$P(X=1) = P(A) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=3) = \frac{C_3^3 A_7^1}{C_{10}^4} = \frac{7}{210} = \frac{1}{30}$$

نلخص قانون احتمال X في الجدول التالي :

X	1	2	0	3
P	$\frac{1}{30}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

التمرين رقم 4 :

1 - لدينا $U_0 = 2$ إذن $U_0 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$

نفترض أن $U_{n+1} - 1 > 0$ ونبين أن $U_n - 1 > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1 = \frac{U_n - 1}{2U_n} > 0$$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_n - 1 > 0$

2 - لدينا :

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{2U_{n+1} - 1} = \frac{\frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1}{2 \cdot \frac{3U_n - 1}{2U_n} - 1} = \frac{U_n - 1}{4U_n - 2}$$

$$= \frac{U_n - 1}{2(2U_n - 1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} = \frac{1}{2} V_n$$

إذن (V_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول V_0 بحيث

$$V_0 = \frac{U_0 - 1}{2U_0 - 1} = \frac{2 - 1}{2(2) - 1} = \frac{1}{3}$$

* لدينا $V_n = V_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ إذن $V_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب- لدينا لكل n من $\mathbb{N}$ $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1}$

$$2U_n V_n - V_n = U_n - 1$$

$$2U_n V_n - U_n = V_n - 1$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1}$$

وبما أن $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$

3 - لدينا الدالة $\ln$ متصلة على $]0, +\infty[$ ومنه :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(U_n) = \ln(\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n) = \ln 1 = 0$$

التمرين رقم 5 :

1 - g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 4(e^{2x} + 2xe^{2x}) = 4(1 + 2x)e^{2x}$$

2 - إشارة $g'(x)$ هي إشارة $(1+2x)$ ولدينا جدول إشارة

$(1+2x)$ على $\mathbb{R}$ هو :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$1+2x$	-	0	+

$$\forall x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \quad g'(x) \leq 0 \quad \text{إذن}$$

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\quad g'(x) \geq 0 \quad \text{و}$$

ومنه g تناقصية على المجال $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ و تناقصية على المجال

$$\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right]$$

فإن المعادلة تصبح $(T): y = x$

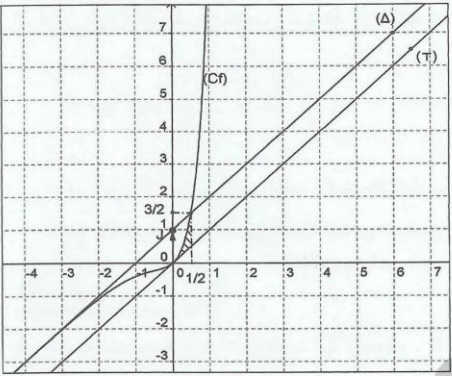
ب- لدينا $f''(x) = g'(x) = 4(1 + 2x)e^{2x}$

$f''(x)$ لها إشارة $1 + 2x$ التي تتعدم مغيرة إشارتها في $-\frac{1}{2}$

إذن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف أفصولها $-\frac{1}{2}$

5- نلخص تغيرات f في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



إنشاء (C) :

6- أ- نضع $\begin{cases} u(x) = 2x - 1 \\ v(x) = e^{2x} \end{cases}$ فنجد $\begin{cases} u'(x) = 2 \\ v'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$ ومنه

$$\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx = \left[\frac{1}{2}(2x - 1)e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{e}{2}$$

ب- لدينا

$$\int_0^{\frac{1}{2}} [f(x) - x] dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [(2x - 1)e^{2x} + 1] dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 1 - \frac{e}{2} + [x]_0^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{e}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{e}{2}$$

ومنه $A = \left(\frac{3}{2} - \frac{e}{2} \right) 4cm^2 = (6 - 2e)cm^2$

(لاحظ أن : $f(x) - x \geq 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$)

أ- 3 $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{4e^{-1}}{2} = 1 - \frac{2}{e} = \frac{e-2}{e} > 0$

ب- لدينا $1 - \frac{2}{e}$ قيمة دنيا مطلقة و $1 - \frac{2}{e} > 0$

إذن $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$

II- 1- لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

* $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{2x} + x + 1$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} + x + 1 = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{2x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = 0$)

2- f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 2xe^{2x} + 2(2x - 1)e^{2x} + 1$$

$$= 2e^{2x} + 4xe^{2x} + 1 = g(x)$$

وبما أن $g(x) > 0$ فإن f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

3- أ- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x} e^{2x} + \frac{x + 1}{x} = +\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x} = 2$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 1}{x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$)

إذن (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتاب بجوار $+\infty$

ب- لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1)e^{2x}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2xe^{2x} - e^{2x} = 0$$

إذن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x + 1$ مقارب للمنحنى (C) بجوار $-\infty$

ج- لدينا $f(x) - (x + 1) = (2x - 1)e^{2x} = 0$

$$x = \frac{1}{2}$$

تكافئ

ومنه (C) يوجد تحت المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty, \frac{1}{2}[$

(لأن $(2x - 1) < 0$)

و يوجد فوق المستقيم (Δ) على المجال $\left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$

(لأن $(2x - 1) > 0$)

4- أ- لدينا معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة O هي :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

وبما أن $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$