

$$= a + b + c - ab\sqrt{2} - ac\sqrt{2} - bc\sqrt{2} + 2abc$$

$$a \perp (b \perp c) = a \perp (b + c - bc\sqrt{2}) \quad \text{ثم لدينا :}$$

$$= a + (b + c - bc\sqrt{2}) - a(b + c - bc\sqrt{2})\sqrt{2}$$

$$= a + b + c - bc\sqrt{2} - ab\sqrt{2} - ac\sqrt{2} + 2abc$$

$$\forall (a, b, c) \in E^2 ; (a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c) \quad \text{ومنه :}$$

إذن $\perp$ قانون تجميعي في E .

- لنحدد عنصرا e (إذا وجد)

$$\forall a \in E ; a \perp e = a \quad \text{بحيث :}$$

($\perp$ قانون تبادلي)

$$a \perp e = a \Leftrightarrow a + e - ae\sqrt{2} = a$$

$$\Leftrightarrow e(1 - a\sqrt{2}) = 0$$

$$a\sqrt{2} \neq 1 \quad \text{فإن} \quad a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{وبما أن :}$$

$$1 - a\sqrt{2} \neq 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$a \perp e = a \Leftrightarrow e = 0 \quad \text{فإن :}$$

ومنه 0 هو العنصر المحايد.

- ليكن a عنصرا من E ، هل يوجد عنصر x من E بحيث $a \perp b = 0$ ؟

$$a \perp x = 0 \Leftrightarrow a + x - ax\sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1 - a\sqrt{2}) = -a$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{a\sqrt{2} - 1} \quad \left(a \neq \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$a^{(-1)} = \frac{a}{a\sqrt{2} - 1} \quad \text{ومنه كل عنصر } a \text{ من } E \text{ يقبل ماثلا :}$$

في E بالنسبة للقانون $\perp$.

خلاصة :

القانون $\perp$ تجميعي ويقبل عنصرا محايدا هو 0 وكل عنصر يقبل ماثلا وتبادلي، إذن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية.

(II)

$$(1) \quad A^2 = -2A \quad \text{أ-لنتحقق من أن :}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2A$$

$$M(a) = I + \frac{a}{\sqrt{2}} A$$

$$M(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} - a & a \\ a & \sqrt{2} - a \end{pmatrix} \quad \text{لدينا :}$$

Achamel.info

حل التمرين الأول :

$$E = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \quad \text{لدينا :}$$

$$\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b = a + b - ab\sqrt{2}$$

(1) أ- التحقق من النتيجة المطلوبة :

$$\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b = a + b - ab\sqrt{2} \quad \text{لدينا :}$$

ولكل زوج (a, b) من E^2 .

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(2ab - a\sqrt{2} - b\sqrt{2} + 1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}ab + a + b - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= a + b - ab\sqrt{2}$$

ومنه :

$$\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1)$$

ب- استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

ليكن a و b عنصرين من E

$$a \perp b = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \quad \text{لدينا :}$$

$$a \perp b - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \quad \text{ومنه :}$$

$$b \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad a \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{وبما أن :}$$

$$b\sqrt{2} - 1 \neq 0 \quad a\sqrt{2} - 1 \neq 0 \quad \text{فإن :}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}(a\sqrt{2} - 1)(b\sqrt{2} - 1) \neq 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b \neq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{يعني :}$$

$$\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b \in E \quad \text{إذن :}$$

ومنه $\perp$ قانون تركيب داخلي في E .

(2) لنبين أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية .

$$\forall (a, b) \in E^2 ; a \perp b = a + b - ab\sqrt{2} \quad \text{لدينا :}$$

$$= b + a - ba\sqrt{2}$$

$$= b \perp a$$

(لأن الجمع والضرب في $\mathbb{R}$ تبادليان) ومنه $\perp$ قانون تبادلي في E .

ليكن a و b و c ثلاثة عناصر من E .

$$(a \perp b) \perp c = (a + b - ab\sqrt{2}) \perp c \quad \text{لدينا :}$$

$$= (a + b - ab\sqrt{2}) + c - (a + b - ab\sqrt{2})c\sqrt{2}$$

حل التمرين الثاني:

(1) أ- لنحدد (H)

$$M(Z) \in (H) \Leftrightarrow Z^2 - \bar{Z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \quad \text{لدينا:}$$

$$(x, y) \in \mathbb{R} \quad \text{حيث } Z = x + iy \quad \text{نضع:}$$

$$Z^2 - \bar{Z}^2 = a^2 - \bar{a}^2$$

$$\Leftrightarrow (Z + \bar{Z})(Z - \bar{Z}) = (a + \bar{a})(a - \bar{a}) \quad \text{ومنه:}$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot 2iy = 2a \cdot 2i\beta$$

$$\Leftrightarrow xy = \alpha\beta$$

إذن:

- إذا كان $\alpha = 0$ أو $\beta = 0$ فإن $x = 0$ أو $y = 0$

ومنه (H) هي اتحاد محوري المعلم.

$$xy = \alpha\beta \Leftrightarrow y = \frac{\alpha\beta}{x} \quad \text{إذا كان } \alpha\beta \neq 0 \text{ فإن:}$$

ومنه (H) هي الهذلول الذي مركزه O ومقاربيه هما $x=0$

و $y=0$ ، معادلته الديكارتية في المعلم $(o, \vec{u}, \vec{v})$

$$y = \frac{\alpha\beta}{x} \quad \text{هي:}$$

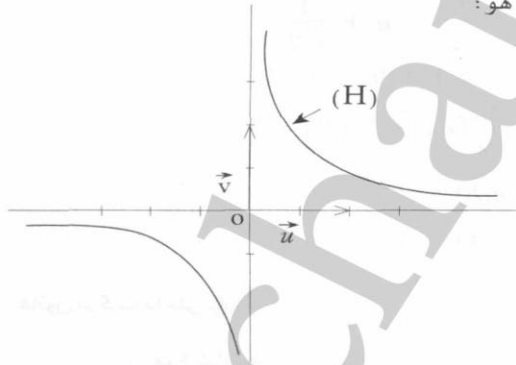
ب- إنشاء (H) في حالة $a = 1 + i$

$$\alpha = \beta = 1 \quad \text{في هذه الحالة}$$

$$\alpha\beta \neq 0 \quad \text{ومنه:}$$

إذن (H) هو الهذلول الذي معادلته $y = \frac{1}{x}$

منحناه هو:



(2) أ- لنحدد (C)

لتكن $M(Z)$ نقطة من المستوى

لدينا:

$$M(Z) \in (C) \Leftrightarrow (Z - a)(\bar{Z} - \bar{a}) = 4a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow (Z - a)(\bar{Z} - \bar{a}) = 4|a|^2$$

$$\Leftrightarrow |Z - a|^2 = 4|a|^2$$

$$\Leftrightarrow |Z - a| = 2|a|$$

نعتبر النقطة A التي لحقها a.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & a \\ a & -a \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= I + \frac{a}{\sqrt{2}} A \end{aligned}$$

ب- لنبين أن F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

ليكن $M(a)$ و $M(a')$ عنصرين من F حيث $(a, a') \in E^2$

$$M(a) \times M(a') = \left(I + \frac{a}{\sqrt{2}} A \right) \left(I + \frac{a'}{\sqrt{2}} A \right) \quad \text{لدينا:}$$

$$= I + \frac{a}{\sqrt{2}} A + \frac{a'}{\sqrt{2}} A + \frac{aa'}{2} A^2$$

$$= I + \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a') A - aa' A$$

$$= I + \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a' - aa' \sqrt{2}) A$$

وبما أن $(a, a') \in E^2$ فإن حسب السؤال (1) ب-

$$x = (a + a' - aa' \sqrt{2}) \in E$$

$$M(a) \times M(a') = I + \frac{x}{\sqrt{2}} A, \quad x \in E \quad \text{وبالتالي فإن:}$$

$$= M(x)$$

$$\forall (a, a') \in E^2; M(a) \times M(a') \in F \quad \text{إذن:}$$

ومنه F جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

(2) لدينا التطبيق: $\varphi: (E, \perp) \rightarrow (F, \times)$

$$a \rightarrow \varphi(a) = M(a)$$

أ- ليكن a و b عنصرين من E.

$$\varphi(a \perp b) = \varphi(a + b - ab\sqrt{2}) \quad \text{لدينا:}$$

$$= M(a + b - ab\sqrt{2})$$

$$= M(a) \times M(b)$$

$$= \varphi(a) \times \varphi(b)$$

ومنه φ تشاكل من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$

$$(\forall y \in F)(\exists a \in E); y = M(a) = \varphi(a)$$

فإن φ تطبيق شمولي.

وبالتالي φ تطبيق تقابلي.

نتيجة: φ تشاكل تقابلي من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$

ب- لنستنتج بنية $(F, \times)$

بما أن $(E, \perp)$ زمرة تبادلية و φ تشاكل تقابلي من $(E, \perp)$ نحو $(F, \times)$

فإن $(F, \times)$ زمرة تبادلية.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u^3(u+2a) = 16(a\bar{a})^2 + 8a\bar{a}u \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u^4 + 2au^3 - 8a\bar{a}u - 16(a\bar{a})^2 = 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$(u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = u^4 - 8a\bar{a}^2u + 2au^3 - 16(a\bar{a})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \end{cases}$$

إذن :

$$\Leftrightarrow (S')$$

ومنه المطلوب .

ب- لنحدد بدلالة θ و r ألتقاطع نقط (H) و (C).

لتكن $M(Z)$ نقطة من المستوى .

$$M \in (H) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} Z^2 - \bar{Z}^2 = a^2 - \bar{a}^2 \\ (Z-a)(\bar{Z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \end{cases}$$

$$(u = z - a \text{ حيث}) \Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (u+2a)(u^3 - 8a\bar{a}^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u = -2a \text{ أو } u^3 - 8a\bar{a}^2 = 0 \end{cases}$$

لدينا :

$$a = xe^{i\theta}$$

$$M \in (H) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u = -2re^{i\theta} \text{ أو } u^3 = 8r^3e^{-i\theta} \end{cases}$$

$8r^3e^{-i\theta}$: جذر مكعب للعدد العقدي $8r^3e^{-i\theta}$ هي :

لدينا الجذور المكعبة للعدد العقدي $8r^3e^{-i\theta}$ أي :

$$k \in (0, 1, 2) \quad U_k = 2re^{i(\frac{-\theta}{3} + k\frac{2\pi}{3})}$$

$$U_0 = 2re^{-i\frac{\theta}{3}} \quad (k=0)$$

$$U_1 = 2re^{i(\frac{-\theta}{3} + \frac{2\pi}{3})} \quad (k=1)$$

$$U_2 = 2re^{i(\frac{-\theta}{3} + \frac{4\pi}{3})} \quad (k=2)$$

$$U_3 = -2re^{i\theta}$$

نضع :

$$U_3 \bar{U}_3 = (-2a)(-2\bar{a}) = 4a\bar{a}$$

لدينا :

وبملاحظة أن :

$$U_2 = U_0 j^2 \quad U_1 = U_0 j$$

حيث :

$$j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

فإن :

$$U_k \bar{U}_k = (U_0 j^k)(\bar{U}_0 \bar{j}^k)$$

$$= U_0 \bar{U}_0 (j \bar{j})^k$$

$$= 4r^2 = 4a\bar{a}$$

ومنه :

$$M \in (H) \cap (C) \Leftrightarrow \begin{cases} U = U_0 \text{ أو } U = U_1 \\ \text{أو } U = U_2 \text{ أو } U = U_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Z = U_0 + a \text{ أو } Z = U_1 + a \\ \text{أو } Z = U_2 + a \text{ أو } Z = U_3 + a \end{cases}$$

إذن : $M \in (C) \Leftrightarrow AM = 2|a|$

ومنه (C) هي الدائرة التي مركزها A وشعاعها $r = 2|a|$

طريقة أخرى :

نضع : $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ حيث $Z = x + iy$

$$M \in (C) \Leftrightarrow (Z-a)(\bar{Z}-\bar{a}) = 4a\bar{a}$$

$$\Leftrightarrow Z\bar{Z} - \bar{a}Z - a\bar{Z} - 3a\bar{a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2\beta y - 3(\alpha^2 + \beta^2) = 0$$

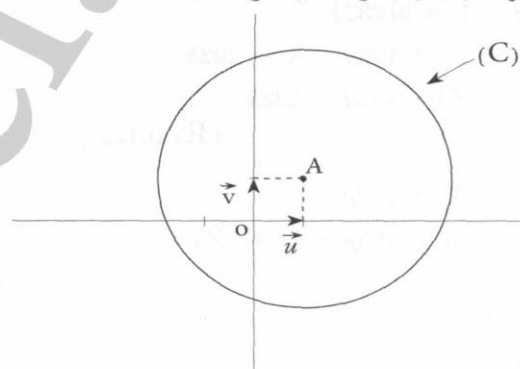
$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2$$

إذن : (C) هي الدائرة التي مركزها $A(\alpha, \beta)$ وشعاعها

$$r = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

ب- إنشاء (C) في حالة $a = 1 + i$ في هذه الحالة (C) هي الدائرة

التي مركزها $A(1, 1)$ وشعاعها هو : $r = 2\sqrt{2}$



(3) أ- لنبين أن :

$$(S) \Leftrightarrow (S')$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} (Z-a)(\bar{Z}-\bar{a}) = 4a\bar{a} \\ Z^2 - a^2 = \bar{Z}^2 - \bar{a}^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ (Z-a)(Z+a) = (\bar{Z}-\bar{a})(\bar{Z}+\bar{a}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u(u+2a) = \bar{u}(\bar{u}+2\bar{a}) \end{cases}$$

$$u\bar{u} = 4a\bar{a}$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow \bar{u} = \frac{4a\bar{a}}{u} ; (u \neq 0)$$

$$(u = 0 \Leftrightarrow Z = a)$$

لأن :

$$\Leftrightarrow a = 0$$

(لا يمكن)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u(u+2a) = \frac{4a\bar{a}}{u} \left(\frac{4a\bar{a}}{u} + 2\bar{a} \right) \end{cases}$$

ومنه :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u\bar{u} = 4a\bar{a} \\ u(u+2a) = \frac{4a\bar{a}(4a\bar{a} + 2\bar{a}u)}{u^2} \end{cases}$$

و منه : $232 \mid 195(x - 163)$
 وبما أن : $232 \wedge 195 = 1$
 فإن : $232 \mid (x - 163)$
 إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; x = 163 + 232k$
 ثم : $195 \times 232k = 232(y - 137)$
 $\Leftrightarrow 195k = y - 137$
 $\Leftrightarrow y = 137 + 195k$
 وعكسيا كل زوج : $(163 + 232k ; 137 + 195k)$
 يحقق المعادلة (E) و منه مجموعة حلول المعادلة (E) هي :
 $S = \{(163 + 232k ; 137 + 195k) / k \in \mathbb{Z}\}$
 ج- تحديد d من $\mathbb{N}$ بحيث :
 $195d \equiv 1[232] \quad 0 \leq d \leq 232$
 لدينا : $195d \equiv 1[232]$
 ومنه : $195d - 1 \equiv 0[232]$
 إذن : $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; 195d - 1 = 232k$
 $(\exists k \in \mathbb{Z}) ; 195d - 232k = 1$
 يعني (d, k) حل للمعادلة (E)
 إذن : $\begin{cases} d = 163 + 232p \\ k = 137 + 195p ; (p \in \mathbb{Z}) \end{cases}$
 وبما أن : $0 \leq d \leq 232$
 فإن : $0 \leq 163 + 232p \leq 232$
 $-163 \leq 232p \leq 69$
 أي : $(p \in \mathbb{Z}) ; -\frac{163}{232} \leq p \leq \frac{69}{232}$
 ومنه : $p = 0$
 إذن : $d = 163$
 2) لنبين أن 233 أولي .
 لدينا : $\sqrt{233} \simeq 15.2643...$
 ومنه : $E(\sqrt{233}) = 15$
 والأعداد الأولية الأصغر من 15 هي : 2, 3, 5, 7, 11, 13.
 العدد 233 لا يقبل القسمة على أي واحد من الأعداد السابقة
 إذن 233 عدد أولي
 3) لتكن A بحيث :
 $A = \{k \in \mathbb{N} / 0 \leq k \leq 232\}$
 $f : A \longrightarrow A$
 $a \longrightarrow f(a)$
 $a^{195} \equiv f(a)[233]$ حيث :
 $(\forall a \in A \setminus \{0\}) ; a^{232} \equiv 1[233]$ نقبل أن :

و بالتالي ألتحق نقط تقاطع (H) و (C) هي :
 $Z_0 = 2re^{-i\frac{\pi}{3}} + re^{i\pi} = r(2e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{i\pi})$
 $Z_1 = 2re^{-i\frac{\pi}{3}.j} + re^{i\pi} = r(2e^{-i\frac{\pi}{3}.j} + e^{i\pi})$
 $Z_2 = 2re^{-i\frac{\pi}{3}.j^2} + re^{i\pi} = r(2e^{-i\frac{\pi}{3}.j^2} + e^{i\pi})$
 $Z_3 = -2re^{i\pi} + re^{i\pi} = -re^{i\pi}$
 ج- لتكن M_0 و M_1 و M_2 النقط التي ألتحقها على التوالي هي :
 Z_2 و Z_1 و Z_0
 لدينا :
 $\frac{Z_2 - Z_0}{Z_1 - Z_0} = \frac{(U_2 + a) - (U_0 + a)}{(U_1 + a) - (U_0 + a)}$
 $= \frac{U_2 - U_0}{U_1 - U_0} = \frac{U_2 j^2 - U_0}{U_1 j - U_0}$
 $= \frac{U_0(j^2 - 1)}{U_0(j - 1)} = j + 1$
 ونعلم أن : $1 + j + j^2 = 0$
 ومنه : $1 + j = -j^2$
 إذن : $\frac{Z_2 - Z_0}{Z_1 - Z_0} = -j^2 = -\bar{j} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$
 (لأن : $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$)
 ومنه :
 $\left| \frac{Z_2 - Z_0}{Z_1 - Z_0} \right| = 1$
 $\arg\left(\frac{Z_2 - Z_0}{Z_1 - Z_0}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} M_0 M_1 = M_0 M_2 \\ \arg(\overrightarrow{M_0 M_1}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$
 و بالتالي :
 المثلث $M_0 M_1 M_2$ مثلث متساوي الأضلاع رؤوسه تنتمي إلى تقاطع
 (H) و (C).
حل التمرين الثالث :
 1) أ- لنحدد القاسم المشترك للعددين 195 و 232
 لدينا : $195 = 3.5.13$ و $232 = 2^3.29$
 ومنه : $195 \wedge 232 = 1$
 هذا يعني أن 195 و 232 أوليان فيما بينهما.
 ب- لدينا : $195x - 232y = 1$ (E)
 نتحقق من أن الزوج (163, 137) حل للمعادلة (E).
 ومنه : $(E) \Leftrightarrow 195x - 232y = 163 \times 193 - 137 \times 232$
 $\Leftrightarrow 195(x - 163) = 232(y - 137)$

حل التمرين الرابع:

(I)

(1) لنبين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

لدينا : g معرفة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; g'(x) = e^x + (x-1)e^x \quad \text{و} \quad = xe^x$$

وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0$

فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة x

إذا كان $x \geq 0$ فإن g تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$.

إذا كان $x \leq 0$ فإن g تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}^-$.

جدول التغيرات : g

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	↘ 0 ↗		

من خلال الجدول نلاحظ أن 0 قيمة دنيا مطلقة لـ g على $\mathbb{R}$

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; g(x) \geq 0$

لدينا : g تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}^-$

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; g(x) > 0$

ولدينا : g تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}^+$

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; g(x) > 0$

ولدينا : $g(0) = 0$

إذن : $x=0$ هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$ على $\mathbb{R}$.

(II) 1) لنحسب النهايتين :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \text{لأن} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} + x$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + xe^x - x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{لأن} \right)$$

لنبين أن : $\forall (a, b) \in A^2 ; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

ليكن a و b عنصرين من A بحيث $f(a) = f(b)$

$$a^{195} = f(a)[233]$$

$$b^{195} = f(b)[233]$$

$$a^{195} = b^{195}[233] \quad \text{و}$$

لدينا : الزوج (163, 137) حل لـ (E)

$$195 \times 163 = 1 + 232 \times 137$$

$$a^{195 \times 163} = b^{195 \times 163}[233]$$

$$a^{(1 + 232 \times 137)} = b^{(1 + 232 \times 137)}[233]$$

$$a \cdot a^{232 \times 137} = b \cdot b^{232 \times 137}[233]$$

$$a(a^{232})^{137} = b(b^{232})^{137}[233] \quad \text{إذن :}$$

$$(\forall x \in A) x^{232} = 1[233] \quad \text{وبما أن :}$$

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b[233] \quad \text{فإن :}$$

$$\Rightarrow a - b = 0[233]$$

$$233 \mid a - b \quad \text{إذن :}$$

$$-232 \leq a - b \leq 232 \quad \text{وبما أن :}$$

$$|a - b| \leq 232 \quad \text{يعني :}$$

$$a = b \quad \text{فإن :}$$

$$\forall (a, b) \in A^2 ; f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \quad \text{ومنه :}$$

ب- لنحدد a بدلالة b :

$$f(a) = b \Leftrightarrow a^{195} = b[233]$$

$$\Leftrightarrow a^{195 \times 163} = b^{163}[233]$$

$$\Leftrightarrow a^{1 + 232 \times 173} = b^{163}[233]$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (a^{232})^{173} = b^{163}[233]$$

$$\Leftrightarrow a = b^{163}[233]$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; a = b^{163} + 233k$$

استنتاج :

حسب السؤال أ- نستنتج أن f تبايني.

وحسب السؤال ب- نستنتج أن f شمولي.

إذن : f تقابل من A نحو A .

$$f(a) = b \Leftrightarrow a = b^{163} + 233k (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{بما أن :}$$

$$f^{-1}(b) = b^{163} + 233k (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{فإن :}$$

يعني $f^{-1}(b)$ هو باقي القسمة للعدد b^{163} على 233.

و من جهة أخرى لدينا :

$$t \in [0, x] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq x$$

$$\Leftrightarrow -x \leq -t \leq 0$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \leq e^{-t} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}t \leq te^{-t} \leq t$$

باستعمال خاصيات التكامل و الترتيب نجد :

$$(\forall x \geq 0) ; \int_0^x e^{-x} t dt \leq J(x) \leq \int_0^x t dt$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$(\forall x \geq 0) ; \frac{x^2}{2} e^{-x} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

إذا كان $x \leq 0$ فإن :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} = \frac{x^2}{2} \\ \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}} = \frac{x^2}{2} e^{-x} \end{cases}$$

من جهة لدينا :

و من جهة أخرى :

$$J(x) = - \int_0^x te^{-t} dt$$

$$t \in [x, 0] \Leftrightarrow x \leq t \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq -t \leq -x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq e^{-t} \leq e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x}t \leq te^{-t} \leq t$$

ومنه :

$$(\forall x \leq 0) ; \int_x^0 e^{-x} t dt \leq \int_x^0 te^{-t} dt \leq \int_x^0 t dt$$

$$\Leftrightarrow \forall x \leq 0 ; e^{-x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0 \leq -J(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_x^0$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \leq 0) ; -\frac{x^2}{2} e^{-x} \leq -J(x) \leq -\frac{x^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\forall x \leq 0) ; \frac{x^2}{2} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-x}$$

$$\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

ومنه :

خلاصة :

$$\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}} \quad \text{لـ } x \text{ من } \mathbb{R} \text{ لدينا :}$$

جـ نعلم أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq J(x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}} \quad \text{و :}$$

(2) لنبين أن الدالة f متصلة في 0.

$$\text{لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

إذن f متصلة في 0.

(3) لنحسب $f'(x)$; $(\forall x \in \mathbb{R}^*)$

لدينا : f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق

على $\mathbb{R}^*$ هما : $x \longmapsto x$ و $x \longmapsto e^x - 1$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{-[1 + (x-1)e^x]}{(e^x - 1)^2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

بما أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; (e^x - 1)^2 > 0 \quad \text{و}$$

$-g(x)$ هي إشارة $f'(x)$

وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; g(x) > 0$

فإن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) < 0$

إذن f تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$.

$$(\forall x \in \mathbb{R}) ; J(x) = \int_0^x te^{-t} dt \quad (4)$$

أـ لنبين أن : $J(x) = e^{-x}(e^x - 1 - x)$

نضع :

$$\begin{cases} u'(t) = 1 & \text{نجد } u(t) = t \\ v(t) = -e^{-t} & v'(t) = e^{-t} \end{cases}$$

$$J(x) = [-te^{-t}]_0^x + \int_0^x e^{-t} dt$$

$$= [-te^{-t} - e^{-t}]_0^x$$

$$= -xe^{-x} - e^{-x} + 1$$

$$= e^{-x}(e^x - x - 1)$$

ومنه المطلوب .

بـ تأطير $J(x)$:

إذا كان $x \geq 0$ فإن من جهة

لدينا :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} = \frac{x^2}{2} e^{-x} \\ \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}} = \frac{x^2}{2} \end{cases}$$

و

$$= -\frac{xe^x(e^x - 1)^2 - 2e^x g(x)(e^x - 1)}{(e^x - 1)^4}$$

$$= -\frac{(e^x - 1)[xe^x(e^x - 1) - 2e^x(1 + xe^x - e^x)]}{(e^x - 1)^4}$$

$$= \frac{e^x(-xe^x + x + 2 + 2xe^x - 2e^x)}{(e^x - 1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}(xe^x - 2e^x + x + 2)$$

$$f''(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^3}[e^x(x - 2) + x + 2]$$

ومنه المطلوب.

ب- لندرس إشارة

نضع : $h(x) = e^x(x - 2) + 2 + x$

$(\forall x \in \mathbb{R}) ; h'(x) = g(x) \geq 0$

ومنه جدول تغيرات h هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	+
$h(x)$		0	

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^-) ; h(x) \leq 0$

$(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; h(x) \geq 0$

نلخص إشارة : $e^x(x - 2) + 2 + x$ في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x(x - 2) + 2 + x$	-	0	+

ج- لنستنتج أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) > 0$

بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; e^x > 0$

فإن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\frac{e^x(x - 2) + 2 + x}{e^x - 1}$

و التي تلخص في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x(x - 2) + 2 + x$	-	0	+
$e^x - 1$	-	0	+
$\frac{e^x(x - 2) + 2 + x}{e^x - 1}$	+		+

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f''(x) > 0$

(د) أنشاء (C).

(C) يقبل مقاربتين :

ومنه لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{2} e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq e^{-x}(e^x - 1 - x) \leq \frac{x^2}{2} e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

إذن لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2}{2} e^x \cdot e^{-\frac{x+|x|}{2}} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^x \cdot e^{-\frac{x-|x|}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$$

ومنه لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$$

وهذا هو المطلوب.

د- قابلية اشتقاق f في 0.

لدينا : $f(0) = 1$ ومنه :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(e^x - 1 - x)}{x^2 \left(\frac{e^x - 1}{x} \right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} - \left(\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \right) \cdot \left(\frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

نعلم أن :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} \leq \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} e^{\frac{x-|x|}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} e^{\frac{x+|x|}{2}} = \frac{1}{2}$$

وحيث أن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}$$

نتيجة :

ومنه f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0) = -\frac{1}{2}$

$$(5) \text{ أ-لدينا : } (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x - 1)^2}$$

إذن f' قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^*$ لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق

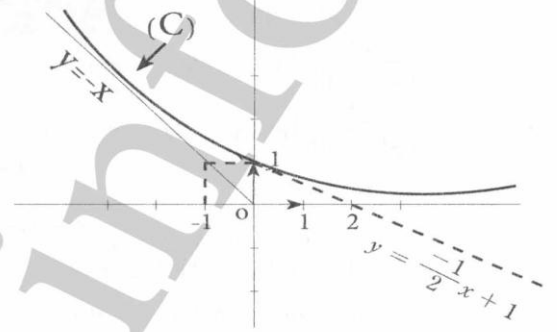
على $\mathbb{R}^*$ هما : $x \rightarrow (e^x - 1)^2$ و $x \rightarrow -g(x)$

ولدينا : لكل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f''(x) = -\frac{g'(x)(e^x - 1)^2 - g(x)((e^x - 1)^2)'}{(e^x - 1)^4}$$

إذن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0$
 وبالتالي: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 ب- إثبات أن:
 $(\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \ln(2)|$
 - لدينا f متصلة و تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}^+) =]0, 1] \subset \mathbb{R}^+$
 - لنبين بالترجع أنه: $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 0$
 من أجل $n=0$, لدينا $U_0=1$
 ومنه: $U_0 > 0$
 لنفترض أن: $U_n > 0$ ولنبين أن $U_{n+1} > 0$
 لدينا: $U_n > 0$ إذن $f(U_n) > 0$ (لأن: $f(\mathbb{R}^+) =]0, 1]$)
 ومنه: $U_{n+1} > 0$
 إذن: $(\forall n \in \mathbb{N}); U_n > 0$
 - ليكن n من $\mathbb{N}$, نعتبر المجال I_n طرفاه U_n و $\ln(2)$
 لدينا $I_n \subset \mathbb{R}^+$
 وبما أن f قابلة للتشتاق على $\mathbb{R}^+$ فإنها قابلة للاشتقاق على I_n
 و $(\forall x \in I_n); |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
 فإنه حسب متباينة التزايد المتناهية:
 $|f(U_n) - f(\ln 2)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \ln 2|$
 وحيث أن:
 $f(U_n) = U_{n+1}$
 $f(\ln 2) = \ln 2$
 فإن: $(\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |U_n - \ln 2|$
 ج- تقارب ونهاية المتتالية $(U_n)_n$
 لدينا: $(\forall n \in \mathbb{N}); |U_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |U_n - \ln 2|$
 لنبين بالترجع أنه:
 $(\forall n \in \mathbb{N}); |U_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$
 من أجل $n=0$, لدينا:
 $|U_0 - \ln 2| = |1 - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |1 - \ln 2|$
 نفترض أن:
 $|U_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$
 ولنبين أن:
 $|U_{n+1} - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |1 - \ln 2|$

مقارب أفقي معادلته $y=0$ بجوار $+\infty$
 ومقارب مائل معادلته $y=-x$ بجوار $-\infty$
 و (C) يقبل مماساً في النقطة $(0, 1)$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x + 1$
 و (C) مقعر نحو الأرتاب الموجبة على $\mathbb{R}^*$



(III) 1) لنبين أن $x = \ln 2$ هو الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = x$
 نضع:
 $l(x) = f(x) - x$
 $l(\ln 2) = f(\ln 2) - \ln 2$
 $= \frac{\ln 2}{e^{\ln 2} - 1} - \ln 2 = 0$
 (لأن: $e^{\ln 2} = 2$)
 إذن: $x = \ln 2$ حل للمعادلة $f(x) = x$
 ثم لدينا:
 $(\forall x \in \mathbb{R}); l'(x) = f'(x) - 1$
 $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) < 0$
 $(\forall x \in \mathbb{R}); l'(x) < -1 < 0$
 ومنه l تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}$.
 إذن:
 $(\forall x \in]-\infty; \ln 2[); l(x) > l(\ln 2) = 0$
 $(\forall x \in]\ln 2; +\infty[); l(x) < l(\ln 2) = 0$
 $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}); l(x) \neq 0$
 $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}); f(x) \neq x$
 إذن المعادلة: $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً هو $x = \ln 2$ في $\mathbb{R}$.
 2) أ- لنبين أن: $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'(x) \leq \frac{1}{2}$
 لدينا حسب السؤال (II) ج- 5: $(\forall x \in \mathbb{R}^*); f''(x) > 0$
 إذن f' دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ ومنه:
 $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'(x) \geq f'(0)$
 $(\forall x \in \mathbb{R}^+); f'(x) \geq -\frac{1}{2}$
 ثم نعلم أن:

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} = 0$

و : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\frac{e^x - 1}{x}} = 0$

لأن : $\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \end{array} \right)$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = 0 = F(0)$

إذن F متصلة في 0.

ج- قابلية اشتقاق F في 0.

لدينا : $F(0) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x}$

نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

فإن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x}{e^{2x} - 1} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{x}{e^x - 1}$

أي : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{1}{\frac{e^{2x} - 1}{2x}} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = 1$

لأن : $\left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \end{array} \right)$

وهذا يعني أن F قابلة للاشتقاق في 0 و $F'(0) = 1$

(2) أ- لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}$ ومنه تقبل دالة أصلية φ على $\mathbb{R}$ ولكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا : $F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$

نعتبر الدالة u بحيث : $u(x) = 2x$

بما أن الدالتين u و φ قابلتين للاشتقاق على كل من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$

ولدينا : $U(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}_+^*$ و $U(\mathbb{R}_-^*) = (\mathbb{R}_-^*)$

فإن الدالة $F = \varphi \circ u - \varphi$ قابلة للاشتقاق على كل من $\mathbb{R}_+^*$ و $\mathbb{R}_-^*$

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = (\varphi \circ u(x))' - \varphi'(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = 2\varphi'(u(x)) - \varphi'(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = 2f(2x) - f(x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = \frac{4x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1}$

لدينا : $|U_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} |1 - \ln 2|$

و : $|U_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$

إذن : $|U_{n+1} - \ln 2| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |1 - \ln 2|$

أي : $|U_{n+1} - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |1 - \ln 2|$

وبالتالي : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |U_n - \ln 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |1 - \ln 2|$

وبما أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

لأن : $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ln 2$

إذن : $(U_n)_n$ متقاربة ونهايتها هي $\ln 2$.

(IV)

(1) لنبين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

- ليكن x من $\mathbb{R}_+^*$

لدينا f تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}_+^*$

ومنه : $\forall t \in [x; 2x] ; f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$

إذن : $f(2x) \int_x^{2x} dt \leq \int_x^{2x} f(t) dt \leq f(x) \int_x^{2x} dt$

أي : $xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

- ليكن x من $\mathbb{R}_-^*$

لدينا f تناقصية قطعاً على $\mathbb{R}_-^*$ و $2x < x$ إذن :

$\forall t \in [2x, x] ; f(x) \leq f(t) \leq f(2x)$

إذن : $f(x) \int_{2x}^x dt \leq \int_{2x}^x f(t) dt \leq f(2x) \int_{2x}^x dt$

أي : $-xf(x) \leq -F(x) \leq -xf(2x)$

ومنه : $xf(2x) \leq F(x) \leq xf(x)$

وبالتالي : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^{2x} - 1}$

نتيجة :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

ب- لنبين أن F متصلة في 0 :

لدينا : $F(0) = 0$ و :

$(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{2x^2}{e^{2x} - 1} \leq F(x) \leq \frac{x^2}{e^x - 1}$

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{e^x - 1} \left(\frac{4}{e^x - 1} - 1 \right) \\ &= \frac{x}{e^x - 1} \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) \\ (\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) &= \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x) \end{aligned}$$

ب- تغيرات F .

لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; F'(x) = \left(\frac{3 - e^x}{e^x + 1} \right) f(x)$

وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; f(x) > 0$

و $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; e^x + 1 > 0$

فإن إشارة $F'(x)$ هي إشارة $3 - e^x$:

$$3 - e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln 3$$

$$x \geq \ln 3 \Leftrightarrow 3 - e^x \leq 0$$

$$x \leq \ln 3 \Leftrightarrow 3 - e^x \geq 0$$

ومنه :

F تزايدية قطعاً على $]-\infty, \ln 3]$

F تناقصية قطعاً على $[\ln 3, +\infty[$