

لدينا: $(I, \times)$ زمرة تبادلية.

$(I/\{1\}, *)$ زمرة تبادلية.

القانون $*$ توزيعي بالنسبة ل $\times$

إذن: $(I, \times, *)$ جسم تبادلي.

1-II) لدينا:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2) نفترض أن للمصفوفة A مقلوبا B.

$$AB = I, I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ لدينا:}$$

$$A^2 B = A$$

$$A^3 B = A^2$$

أي: $A^2 = 0$ وهذا غير صحيح. إذن افتراضنا خاطئ.

التمرين الثاني:

$$3 + 4i = 4 + 4i - 1 \text{ (1) لدينا:}$$

$$3 + 4i = 2^2 + 2 \times 2i + i^2 \text{ ومنه:}$$

$$= (2 + i)^2 \text{ ومنه:}$$

ومنه الجدران المربعان للعدد $3 + 4i$ هما: $2 + i$

$$\text{و } -2 - i$$

$$\text{ب- حل المعادلة: } 4Z^2 - 10iZ - 7 - i = 0 \text{ (E):}$$

$$\Delta = (-10i)^2 + 16(7 + i) \text{ لدينا:}$$

$$= -100 + 112 + 16i$$

Achamel.info

التمرين الأول:

1-I) القانون $*$ تبادلي:

$$\forall (a, b) \in I^2$$

$$a * b = e^{\ln a \ln b} = e^{\ln b \ln a}$$

$$= b * a$$

$$\forall (a, b, c) \in I^3$$

$$(a * b) * c = e^{\ln(a * b) \ln c}$$

$$= e^{\ln(e^{\ln a \ln b}) \ln c}$$

$$= e^{\ln a \ln b \ln c}$$

$$= e^{\ln a \ln c \ln b}$$

$$= a * e^{\ln b \ln c}$$

$$= a * (b * c)$$

$$\forall x > 0 \quad x * \varepsilon = x$$

$$\text{لدينا: } x * \varepsilon = e^{\ln x \ln \varepsilon} = e^{\ln x} = x$$

$$\text{القانون } * \text{ يقبل } \varepsilon = e \text{ عنصرا محايدا.}$$

$$\text{(3) أ- ليكن } x > 0 \text{ و } x \neq 1 \text{ لدينا:}$$

$$x * x' = e \Leftrightarrow e^{\ln x \ln x'} = e$$

$$\Leftrightarrow \ln x \ln x' = 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x' = \frac{1}{\ln x} \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\text{وبالتالي مماثل } x \text{ هو العدد } x' = e^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\text{إذن: } (I/\{1\}, *) \text{ زمرة تبادلية.}$$

$$\text{ب- ليكن } x > 1 \text{ و } y > 1 \text{ وليكن } y^{-1} \text{ مماثل } y \text{ بالنسبة للقانون } *$$

$$\text{لدينا:}$$

$$x * y^{-1} = x * e^{\frac{1}{\ln y}}$$

$$= e^{\ln x \ln e^{\frac{1}{\ln y}}}$$

$$= e^{\ln x \times \frac{1}{\ln y}} = e^{\frac{\ln x}{\ln y}}$$

$$\text{لدينا:}$$

$$x * y^{-1} > 1 \text{ ومنه: } \frac{\ln x}{\ln y} > 0$$

$$\text{وبالتالي: } [1, +\infty[\text{ زمرة جزئية من } (I/\{1\}, *)$$

$$\text{(4) أ- ليكن } x \text{ و } y \text{ و } z \text{ من } I$$

$$\text{لدينا:}$$

$$x * (y \times z) = e^{\ln x \ln (y \times z)}$$

$$= e^{\ln x (\ln y + \ln z)} = e^{\ln x \ln y + \ln x \ln z}$$

$$= e^{\ln x \ln y} \cdot e^{\ln x \ln z}$$

$$= (x * y) \cdot (x * z)$$

$$(\widehat{ABO} + \widehat{AOB} + \widehat{OAB} = \pi)$$

إذن المثلث AOB قائم الزاوية ومتساوي الساقين في A.
(3) لتكن $C(c)$; $D(d)$ و $L(\ell)$ نقط من المستوى العقدي

$$c \neq a$$

أ- ليكن r الدوران الذي مركزه C وزاويته $\frac{\pi}{2}$

$$r(B) = D \Leftrightarrow d - c = e^{i\frac{\pi}{2}}(b - c)$$

$$\Leftrightarrow d - c = i(b - c)$$

$$\Leftrightarrow d = ib - ic + c$$

$$\Leftrightarrow d = ib + (1 - i)c$$

$$d = \frac{1}{2}i - \frac{3}{2} + (1 - i)c \quad \text{ومنه:}$$

ب- لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{AO}$

$$t(D) = L \Leftrightarrow \ell = d + Z_{\vec{AO}}$$

$$\Leftrightarrow \ell = d - a$$

$$\ell = \frac{1}{2}i - \frac{3}{2} + (1 - i)c + \frac{1}{2} - i \quad \text{ومنه:}$$

$$\ell - 1 - \frac{1}{2}i + (1 - i)c \quad \text{أي:}$$

$$\frac{\ell - c}{a - c} = \frac{-1 - \frac{1}{2}i + (1 - i)c - c}{a - c} \quad \text{ج- لدينا:}$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2}i - ic}{a - c}$$

$$= \frac{-1 - \frac{1}{2}i - ic}{-\frac{1}{2} + i - c} = i$$

$$\left\{ \arg\left(\frac{\ell - c}{a - c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \right. \quad \text{ومنه:}$$

$$\left. \frac{LC}{AC} = 1 \Leftrightarrow LC = AC \right\}$$

ومنه فإن المثلث ACL قائم الزاوية ومتساوي الساقين رأسه C.

$$\arg\left(\frac{\ell - c}{a - c}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \quad \text{لأن:}$$

$$(CA) \perp (CL) \quad \text{يعني:}$$

$$= 12 + 16i$$

$$= 4(3 + 4i)$$

$$= 4(2 + i)^2 = [2(2 + i)]^2$$

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{10i + 2(2 + i)}{8} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ Z_2 = \frac{10i - 2(2 + i)}{8} = -\frac{1}{2} + i \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$S = \{Z_1, Z_2\}$$

(2) a و b هما حلي المعادلة (E) حيث $\operatorname{Re}(a) < 0$ إذن:

$$b = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \quad \text{و} \quad a = -\frac{1}{2} + i$$

أ- لدينا:

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i}{-\frac{1}{2} + i} = \frac{1 + 3i}{-1 + 2i}$$

$$= \frac{(1 + 3i)(-1 - 2i)}{(-1 + 2i)(-1 - 2i)}$$

$$= \frac{-1 - 2i - 3i + 6}{5}$$

$$= \frac{5 - 5i}{5} = 1 - i$$

ومنه المتساوية المطلوبة.

ب- الاستنتاج:

$$\frac{b}{a} = 1 - i \quad \text{لدينا:}$$

$$\arg\left(\frac{b}{a}\right) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{ومنه:}$$

$$(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

من جهة أخرى لدينا:

$$AO = |0 - a| = |-a|$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$AB = |b - a| = \left|1 + \frac{1}{2}i\right|$$

$$= \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

إذن $AO = AB$ ومنه فإن المثلث OAB متساوي الساقين رأسه

A.

$$\widehat{AOB} = \frac{\pi}{4} \quad \text{علما أن}$$

$$\widehat{ABO} = \frac{\pi}{4} \quad \text{فإن:}$$

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} \quad \text{ومنه فإن:}$$

التمرين الرابع :

-I

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f(x) = 4xe^{-x^2} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4xe^{-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} x^2 e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x} = 0 \quad \text{لأن :}$$

$$(t = -x^2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \quad \text{و :}$$

2- الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0; +\infty[$

لأن الدالتين $x \mapsto e^{-x^2}$ و $x \mapsto 4x$ قابلتان للاشتقاق على

$[0; +\infty[$.

$$(\forall x \in [0, +\infty[) f'(x) = (4xe^{-x^2})'$$

$$= 4(e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2})$$

$$= 4e^{-x^2}(1 - 2x)$$

$$= 4e^{-x^2}(1 - \sqrt{2}x)(1 + \sqrt{2}x)$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(1 - \sqrt{2}x)$

$$\text{لأن : } (\forall x \in [0, +\infty[) 4e^{-x^2}(1 + \sqrt{2}x) > 0$$

جدول التغيرات :

x	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f(x)$	0	$2\sqrt{\frac{2}{e}}$	0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4e^{-x^2} = 4 - 3$$

ومنه معادلة نصف المماس في أصل المعلم هي :

$$\begin{cases} y = 4x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

التمرين الثالث : 1- لدينا : $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$

داخل $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ نضع الجدول التالي :

$\bar{m}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{m}^2$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$
$\bar{m}^2 + \bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$

$$m^2 + 1 \equiv 0[5] \Leftrightarrow m \in \{5k + 2, 5k + 3/k \in \mathbb{N}\}$$

$$(k \in \mathbb{N}) \quad p = 3 + 4k \quad \text{-I- 2}$$

$$n^2 + 1 \equiv 0[p] \Leftrightarrow n^2 \equiv -1[p]$$

$$(n^2)^{1+2k} \equiv (-1)^{1+2k}[p] \quad \text{منه :}$$

$$(n^2)^{1+2k} \equiv (-1)[p] \quad \text{إذن :}$$

$$n^2 + 1 \equiv 0[p] \quad \text{-ب-}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}/n^2 + 1 = kp$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}/kp - n^2 = 1$$

حسب مبرهنة بوزو يوجد $u = k$ و $v = -n$

$$\text{بحيث } up + vn = 1$$

$$\text{ومنه : } p \wedge n = 1$$

ج- بما أن p أولي و $p \wedge n = 1$

فإن حسب مبرهنة فيرما لدينا :

$$n^{3+4k-1} \equiv 1[p]$$

$$\Leftrightarrow n^{2+4k} \equiv 1[p]$$

$$\Leftrightarrow (n^2)^{1+2k} \equiv 1[p] \quad \text{منه}$$

د- لدينا :

$$(n^2)^{1+2k} \equiv 1[p] \quad \text{و} \quad (n^2)^{1+2k} \equiv -1[p]$$

$$1 \equiv -1[p]$$

$$\Leftrightarrow 2 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow p/2$$

منه

وهذا غير ممكن لأن :

$$(k \in \mathbb{N}) p = 3 + 4k > 2$$

$$(\forall x \in [0, +\infty[)$$

$$f'_n(x) = 4(nx^{n-1}e^{-x^2} + x^n(-2x)e^{-x^2})$$

$$= 4x^{n-1}e^{-x^2}(n - 2x^2)$$

$$= 4x^{n-1}e^{-x^2}(\sqrt{n} - \sqrt{2}x)(\sqrt{n} + \sqrt{2}x)$$

إشارة $f'_n(x)$ هي نفس إشارة $\sqrt{n} - \sqrt{2}x$ على $[0; +\infty[$

لأن: $(\forall x \in [0, +\infty[) nx^{n-1}e^{-x^2}(\sqrt{n} + \sqrt{2}x) > 0$

جدول التغيرات :

x	0	$\frac{\sqrt{2n}}{2}$	$+\infty$
$f'_n(x)$	+	0	-
f_n	0	$4\left(\sqrt{\frac{n}{2e}}\right)^n$	0

3- الدالة f_n متصلة على المجال لأن الدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto e^{-x^2}$ متصلتان على $[0, 1]$

والدالة f_n تقابل من $[0, 1]$ نحو $\left[0, \frac{4}{e}\right]$

بما أن $1 \in \left[0, \frac{4}{e}\right]$

فإنه يوجد سابق وحيد للعدد 1 يعني :

$$(\exists ! u_n \in]0, 1[) / f_n(u_n) = 1$$

$$f^{n+1}(u_n) = 4(u_n)^{n+1}e^{-(u_n)^2} \quad -\text{أ- 4}$$

$$= u_n \times 4u_n^n e^{-(u_n)^2} = u_n$$

$$(4u_n^n e^{-(u_n)^2} = 1 \quad \text{لأن :})$$

ب- لدينا : $u_n < 1 \Leftrightarrow f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

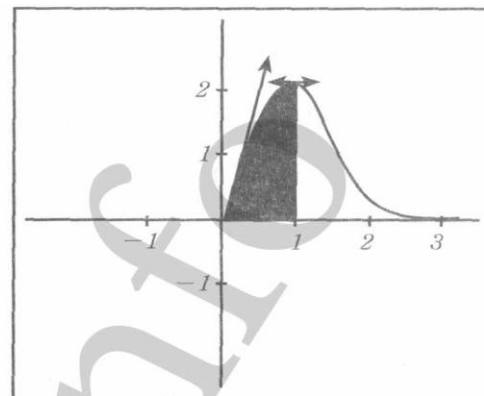
بما أن : f_{n+1} تقابل من $[0, 1]$ نحو $\left[0, \frac{4}{e}\right]$

و f_{n+1} تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ فإن :

$$(\forall n \geq 2) \quad u_{n+1} > u_n$$

يعني المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً .

و حيث أن (u_n) مكبورة ب 1 فإنها متقاربة .



$$a = -2 \int_0^1 -2xe^{-x^2} dx$$

$$= -2 \int_0^1 (-x^2)' e^{-x^2} dx$$

$$= -2 \left[e^{-x^2} \right]_0^1 = -2(e^{-1} - 1)$$

$$a = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

ومنه :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$$

فإن مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى ومحوري المعلم

والمستقيم الذي معادلته $x=1$ هي $A = 8\left(1 - \frac{1}{e}\right)cm^2$

$$n \in \mathbb{N} - \{1\} \quad -II$$

$$\forall x \in [0, +\infty[\quad f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$$

$$(\forall x \in]1, +\infty[) \quad x^2 > x \quad -\text{أ- 1} \quad \text{لدينا}$$

$$(\forall x \in]1, +\infty[) \quad -x^2 < -x \quad \text{ومنه :}$$

$$(\forall x \in]1, +\infty[) \quad e^{-x^2} < e^{-x} \quad \text{وبالتالي}$$

$$(\forall x \in]1, +\infty[) \quad 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1)^n (-x)^n e^{-x} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-t} = 0 \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{وبالتالي :}$$

$$2- \text{الدالة } f_n \text{ قابلة للاشتقاق على } [0; +\infty[$$

لأن الدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto e^{-x^2}$ قابلتان للاشتقاق على $[0; +\infty[$

$$= \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

$$= \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt - \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

$$= \varphi(2x) - \varphi(x)$$

ب- الدالة $t \mapsto \frac{1}{\ln(1+t^2)}$ متصلة على $]0, +\infty[$

لأن $t \mapsto 1+t^2$ متصلة على $]0, +\infty[$

و $(\forall t > 0) 1+t^2 > 1$

منه الدالة φ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

إذن: $(\forall x \in]0, +\infty[) \varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

ولدينا $x \mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

و $(\forall x > 0) 2x > 0$

إذن F قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

وبالتالي: $(\forall x \in]0, +\infty[) F'(x) = [\varphi(2x) - \varphi(x)]'$

$$= 2 \times \frac{1}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}$$

$$= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+x^2) \times \ln(1+4x^2)}$$

$$= \frac{\ln((1+x^2)^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+x^2) \times \ln(1+4x^2)}$$

ج- لدينا: $1+x^2 > 1$ و $1+4x^2 > 1$

منه: $\ln(1+4x^2) > 0$

و: $(\forall x > 0) \ln(1+x^2) > 0$

ليكن x من $]0, +\infty[$ لدينا:

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(1+x^2)^2 = \ln(1+4x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 + 1 - 1 - 4x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

بما أن: $x > 0$ فإن $x = \sqrt{2}$

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n - 5$$

أ- بما أن: $0 \leq u_n \leq 1$ ($\forall n \geq 2$)

فإن: $0 < \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 1$ (لأن $u_2 > 0$)

يعني: $0 < l \leq 1$

ب- لدينا: $f_n(u_n) = 1 \Leftrightarrow 4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$

$$\Leftrightarrow \ln(4(u_n)^n e^{-(u_n)^2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln 4 + n \ln(u_n) = (u_n)^2$$

لدينا $0 < u_n < 1$ منه $0 < (u_n)^2 < 1$

$$0 < \ln 4 + n \ln(u_n) < 1$$

يعني:

$$\Leftrightarrow 0 < \frac{\ln 4}{n} + \ln(u_n) < \frac{1}{n}$$

وبالتالي:

$$(\forall n \geq 2) -\frac{\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{\ln 4}{n} = 0 \quad \text{ج- لدينا:}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(u_n) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n} = 0$$

بما أن $\ln$ متصلة على $]0, 1[$

فإن: $\ln(l) = 0$ ومنه $l = 1$

التمرين الخامس:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) F(x) = \int_x^2 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

1- لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا: $-x \in \mathbb{R}^*$

$$F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

نضع: $u = -t$ لدينا: $dt = -du$

$$F(-x) = \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+u^2)} du = -F(x) \quad \text{و}$$

ومنه: F دالة فردية.

$$(\forall x \in]0, +\infty[) \varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$$

$$(\forall x \in]0, +\infty[) F(x) =$$

يعني : $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

ولدينا : $(\forall x > 0) \frac{1}{\ln(1+4x^2)} < \frac{F(x)}{x} < \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

وبما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x^2)} = 0$

فإن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0$

د- من أجل $x = \sqrt{e-1}$ لدينا :

$F(\sqrt{e-1}) < \frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1+e-1)}$

$F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$

يعني : $x = \frac{\sqrt{e-1}}{2}$

ومن أجل :

$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1+4\left(\frac{e-1}{4}\right)\right)}$

$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$ ومنه :

نعتبر الدالة H المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ $H(x) = F(x) - x$ ($\forall x > 0$)

الدالة H قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

$(\forall x > 0)$

$H'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)} - 1$

$= \left(\frac{1}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+4x^2)}\right) + \left(\frac{1}{\ln(1+4x^2)} - 1\right)$

$(\forall x > \frac{\sqrt{e-1}}{2}) \quad 1+4x^2 > e$

$\frac{1}{\ln(1+4x^2)} < 1$ ومنه :

$\forall x > 0 \quad \frac{1}{\ln(1+4x^2)} < \frac{1}{\ln(1+x^2)}$ لدينا

$(\forall x > \frac{\sqrt{e-1}}{2}) \quad H'(x) < 0$ ومنه :

ولدينا : $H\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) = F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > 0$

و $H(\sqrt{e-1}) = F(\sqrt{e-1}) - (\sqrt{e-1}) < 0$

يعني المعادلة $H(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا

ومن $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]0, +\infty[$

$F'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]\sqrt{2}, +\infty[$

$F'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]0, \sqrt{2}[$

ومن F تزايدية قطعاً على $]\sqrt{2}, +\infty[$

وتناقصية قطعاً على $]0, \sqrt{2}[$

3- $(\forall x \in]0, +\infty[) [x; 2x] \subset]0, +\infty[$

الدالة φ متصلة وقابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

ومن φ متصلة على $[x; 2x]$

و φ قابلة للاشتقاق على $]x; 2x[$

حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$\exists c \in]x, 2x[/ \varphi(2x) - \varphi(x) = (2x - x)\varphi'(c)$

$\exists c \in]x, 2x[/ F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$

ب- $x < c < 2x$

$\Leftrightarrow 1+x^2 < 1+c^2 < 1+4x^2$

$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) < \ln(1+c^2) < \ln(1+4x^2)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\ln(1+4x^2)} < \frac{1}{\ln(1+c^2)} < \frac{1}{\ln(1+x^2)}$

$x > 0$ وبما أن :

فإن : $\frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$

ج- لدينا :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4x} \cdot \frac{4x^2}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{4x} = +\infty$ لأن :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+4x^2)}{4x^2} = 1$ و :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty$ ومنه :

ولدينا :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+4x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(x^2\left(\frac{1}{x^2} + 4\right)\right)}{x}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln x}{x} + \frac{\ln\left(\frac{1}{x^2} + 4\right)}{x}\right) = 0^+$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1+4x^2)} = +\infty$ ومنه :