

Achamel.info

## تصحيح الدورة العادية 2014

## حل التمرين الأول:

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} \end{cases} ; n \in \mathbb{N}$$

1- حساب  $u_1$  و  $u_2$ .

$$* u_1 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$* u_2 = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

2- لنبين بالترجع أن لكل  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_n > \frac{1}{2}$ من أجل  $n=0$  لدينا  $u_0 = 1$  و  $1 > \frac{1}{2}$  الخاصية محققة، إذننفترض أن  $u_n > \frac{1}{2}$  ونبين أن  $u_{n+1} > \frac{1}{2}$ لدينا  $u_n > \frac{1}{2}$  حسب الافتراض ومنه  $\frac{1}{2}u_n > \frac{1}{4}$ ومنه  $\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$  أي  $u_{n+1} > \frac{1}{2}$  ومنه المطلوب.

إذن وحسب مبدأ البرهان بالترجع فإن :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_n > \frac{1}{2}$$

$$3- \text{ أ- } \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - u_n$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2}u_n$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + u_n\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

ومنه المطلوب.

ب- الاستنتاج :

$$\forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

## تتمة حل التمرين رقم 1 :

وحيث أن  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n > \frac{1}{2}$  يعني  $\forall n \in \mathbb{N}; u_n - \frac{1}{2} > 0$ ومنه  $u_{n+1} - u_n < 0$  إذن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  تناقصيةوبما أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  مصغرة بالعدد  $\frac{1}{2}$  فإن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة.

$$4- \text{ نضع } \forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n - \frac{1}{2}$$

$$\text{أ- حساب } v_0 : v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ب- لدينا } \forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n - \frac{1}{2}$$

$$\text{ومنه } v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$ 

$$\text{ج- لدينا : } \forall n \in \mathbb{N}; v_n = v_0 q^n = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{لدينا } \forall n \in \mathbb{N}; v_n = u_n - \frac{1}{2} \text{ ومنه } u_n = v_n + \frac{1}{2}$$

$$u_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$u_n = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right]$$

ومنه المطلوب

$$\text{د- لدينا } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

$$\text{ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) = \frac{1}{2}$$

## حل التمرين الثاني:

لدينا:  $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (x-1)^2 e^x$ 

$$1- \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 e^x = +\infty$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = +\infty$ 

$$2- \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)^2 e^x}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 \cdot \left( \frac{e^x}{x} \right) = +\infty$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)^2 = +\infty$ 

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

إذن (C) منحنى الدالة f يقبل فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأرتاب بجوار  $+\infty$ .ج- لدينا  $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (x-1)^2 e^x$ 

$$= \frac{(x-1)^2}{x^e} \times x^2 \times e^x$$

$$= \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 \cdot x^2 e^x$$

$$د- لدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 \cdot x^2 e^x = 0$$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

إذن (C) منحنى الدالة f يقبل مقارباً أفقياً بجوار  $-\infty$  معادلته  $y = 0$ 

$$2- \forall x \in \mathbb{R}; f(x) = (x-1)^2 e^x$$

$$\text{ومنه } f'(x) = [(x-1)^2]' e^x + (x-1)^2 (e^x)'$$

$$= 2(x-1)e^x + (x-1)^2 e^x$$

$$= (2x - 2 + x^2 - 2x + 1)e^x$$

$$f'(x) = (x^2 - 1)e^x$$

ومنه المطلوب.

## تتمة حل التمرين رقم 2:

ب- لدينا  $f'(x) = (x^2 - 1)e^x$ نعلم أن  $\forall x \in \mathbb{R}; e^x > 0$  إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $f'(x)$  هي كالتالي:

| x       | $-\infty$ | -1 | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|---|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0  | - | +         |

$$* f(-1) = (-1-1)^2 e^{-1} = 4e^{-1} = \frac{4}{e}$$

$$* f(1) = (1-1)^2 e^{-1} = 0$$

ومنه جدول تغيرات الدالة f:

| x       | $-\infty$ | -1            | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---------------|---|-----------|
| $f'(x)$ | +         | 0             | - | +         |
| $f(x)$  |           | $\frac{4}{e}$ | 0 | $+\infty$ |

$$3- F(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}; F'(x) = (x^2 - 4x + 5)' e^x + (x^2 - 4x + 5)(e^x)'$$

$$F'(x) = (2x - 4)e^x + (x^2 - 4x + 5)e^x$$

$$F'(x) = (2x - 4 + x^2 - 4x + 5)e^x$$

$$F'(x) = (x^2 - 2x + 1)e^x = (x-1)^2 e^x$$

$$F'(x) = f(x)$$

إذن F هي دالة أصلية للدالة f على  $\mathbb{R}$ .

4- أ- نرسم ب (S) إلى مساحة الجزء المخدش في الشكل

$$\text{أسفله } (S) = \left( \int_{-1}^1 f(x) dx \right) u.a : (\forall x \in \mathbb{R}; f(x) > 0)$$

u.a هي وحدة قياس المساحة

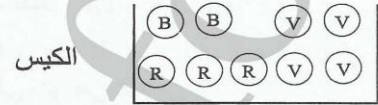
$$\text{ومنه } (S) = [F(x)]_{-1}^1 u.a = (F(1) - F(-1)) u.a$$

$$= (2e^1 - 10e^{-1}) u.a$$

$$(S) = \left( 2e - \frac{10}{e} \right) u.a$$

ب- عدد حلول المعادلة  $f(x) = 1$  هو عدد نقطتقاطع المستقيم ( $\Delta$ ) ذي المعادلة  $y = 1$  مع (C).ومنه عدد حلول المعادلة  $f(x) = 1$  هو 3(لأن ( $\Delta$ ) يقطع (C) في 3 نقط).

### حل التمرين الثالث:



R: حمراء - V: خضراء - B: بيضاء

نسحب عشوائيا كرتين بالتتابع وبدون إحلال .

1- عدد حالات السحب الممكنة هو:  $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$

2- أ-  $A = \{(B, X)\}$

ومنه  $Card A = A_2^1 \times A_8^1 = 16$

ومنه  $p(A) = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

ب- لدينا  $B = \{(V, V)(R, R)(B, B)\}$

$Card B = A_3^2 + A_4^2 + A_2^2$

$= 6 + 12 + 2$

$= 20$

$p(B) = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$

ومنه  $p(\bar{B}) = 1 - p(B)$

$= 1 - \frac{5}{18}$

$p(\bar{B}) = \frac{13}{18}$

ومنه المطلوب.

### تتمة حل التمرين رقم 3:

3- لدينا احتمال شرطي هو  $p_A(B)$

$$p_A(B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)}$$

$$A \cap B = \{(B, B)\}$$

لدينا

$$Card(A \cap B) = A_2^2 = 2$$

$$p_A(B) = \frac{\frac{2}{72}}{\frac{2}{9}} = \frac{2}{72} \times \frac{9}{2}$$

$$p_A(B) = \frac{1}{8}$$

4- المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

لنحدد قانون احتمال X. واصح ان القيم التي يأخذها X هي 0، 1، 2.

$$p(X=0) = \frac{A_7^2}{A_9^2} = \frac{7 \times 6}{9 \times 8} = \frac{7}{12}$$

$$p(X=1) = \frac{2(A_2^1 \times A_7^1)}{A_9^2} = \frac{2 \times 2 \times 7}{9 \times 8} = \frac{7}{18}$$

$$p(X=2) = \frac{A_2^2}{A_9^2} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$$

ومنه الجدول التالي:

|            |                |                |                |
|------------|----------------|----------------|----------------|
| $x_i$      | 0              | 1              | 2              |
| $P(X=x_i)$ | $\frac{7}{12}$ | $\frac{7}{18}$ | $\frac{1}{36}$ |