

التمرين الأول :

الجزء الأول :

1- لنبين أن : $A^{2k} = I$ ($\forall k \in \mathbb{N}$)

لدينا :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$(\forall k \in \mathbb{N}); (A^2)^k = I^k = I$$

ومنه :

$$(\forall k \in \mathbb{N}); A^{2k} = I \quad \text{إذن :}$$

2- لدينا :

$$\det A = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

إذن المصفوفة A تقبل مقلوبا

$$\text{وبما أن : } A^2 = I \text{ فإن : } A^{-1} = A$$

الجزء الثاني :

1 - أ- لنبين أن * قانون تركيب داخلي :

ليكن x و y عنصرين من I

$$\text{لدينا : } x * y = (x - a)(y - a) + a$$

$$\text{ومنه : } (x * y) - a = (x - a)(y - a)$$

$$\text{وحيث أن : } x \in I \text{ و } y \in I$$

$$\text{فإن : } x - a > 0 \text{ و } y - a > 0$$

$$\text{إذن : } (x - a)(y - a) > 0$$

$$\text{وبالتالي : } (x * y) - a > 0$$

$$\text{وهذا يعني أن : } x * y \in I$$

ب- لنبين أن * تبادلي :

ليكن x و y عنصرين من I

$$\text{لدينا : } x * y = (x - a)(y - a) + a$$

$$= (y - a)(x - a) + a$$

$$= y * x$$

(لأن الضرب في $\mathbb{R}$ تبادلي)

$$\text{إذن : } x * y = y * x$$

ومنه * قانون تبادلي .

-لنبين أن * تجميعي :

ليكن x و y و z ثلاث عناصر من I

$$\text{لدينا : } (x * y) * z = [(x * y) - a](z - a) + a$$

$$= [(x - a)(y - a)](z - a) + a$$

$$= (x - a)(y - a)(z - a) + a$$

$$\text{ولدينا : } x * (y * z) = (x - a)[(y * z) - a] + a$$

$$= (x - a)(y - a)(z - a) + a$$

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

وبالتالي :

ومنه المطلوب .

ج- لنبين أن $(I, *)$ يقبل عنصرا محايدا ولنحدده

ليكن x من I ولنعتبر المعادلة $x * y = x$ في I

$$x * y = x \Leftrightarrow (x - a)(y - a) + a = x$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(y - a) = (x - a)$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(y - a - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow y - a - 1 = 0 \quad (x \neq a \text{ لأن } x \neq a)$$

$$\Leftrightarrow y = a + 1 \in I$$

إذن $(I, *)$ يقبل عنصرا محايدا هو العدد $(a + 1)$.

2 - لنبين أن $(I, *)$ زمرة تبادلية :

لدينا : * تجميعي ويقبل عنصرا محايدا وتبادلي، إذن يكفي أن

نبين أن كل عنصر x من I يقبل ماثلا في $(I, *)$.

ليكن x من I ، لنعتبر في I المعادلة : $x * y = a + 1$

ب- لنحل في I المعادلة : $(E) \quad x^{(3)} = a^3 + a$

$$(E) \Leftrightarrow (x * x) * x = a^3 + a$$

$$\Leftrightarrow (x * x - a)(x - a) + a = a^3 + a$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(x - a)(x - a) = a^3$$

$$\Leftrightarrow (x - a)^3 = a^3$$

وبما أن : $x - a > 0$ فإن $x \in I$

ومنه : المعادلة (E) معرفة إذا وفقط إذا كان $a > 0$.

ومنه إذا كان $a > 0$ فإن :

$$(E) \Leftrightarrow (x - a)^3 - a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - a - a)((x - a)^2 + a(x - a) + a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2a)(x^2 - ax + a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2a \text{ أو } x^2 - ax + a^2 = 0$$

لنحل في I المعادلة :

$$x^2 - ax + a^2 = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0 \quad (a > 0)$$

إذن المعادلة ليس لها حل وبالتالي : $(E) \Leftrightarrow x = 2a$

ومنه الحل الوحيد للمعادلة : $x^{(3)} = a^3 + a$; $(a > 0)$

هو $x = 2a$

التمرين الثاني :

1- لنبين أن العدد N يقبل القسمة على 11

$$N = \frac{111 \dots 11}{1 \text{ مرة } 2010} \quad \text{لدينا :}$$

$$N \equiv \sum_{k=0}^{2009} (-1)^k \cdot 1 [11] \quad \text{ومنه :}$$

$$N \equiv \sum_{k=0}^{2009} (-1)^k [11]$$

$$N \equiv \frac{1 - (-1)^{2010}}{1 - (-1)} [11]$$

$$N \equiv 0 [11] \quad \text{إذن :}$$

ومنه N يقبل القسمة على 11.

2- أ- * ليكن عددا أوليا بحيث $p^2 < 2011$

$$p \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23, 29, 31, 37, 41, 43\}$$

$$x * y = a + 1 \Leftrightarrow (x - a)(y - a) + a = a + 1$$

$$\Leftrightarrow (x - a)(y - a) = 1$$

$$\Leftrightarrow y - a = \frac{1}{x - a} \quad (x \neq a)$$

$$\Leftrightarrow y = a + \frac{1}{x - a}$$

$$a + \frac{1}{x - a} \quad \text{إذن مماثل } x \text{ هو :}$$

$$(\text{لدينا } x - a > 0 \text{ إذن } a + \frac{1}{x - a} > a)$$

وبالتالي : $(I, *)$ زمرة تبادلية.

3- أ- لنبين أن φ تشاكل تقابلي من $(I, *)$ نحو $(IR_+, \times)$

ليكن x و y عنصرين من I ، لدينا : $\varphi(x) = \frac{1}{x - a}$

ولدينا : $\varphi(x * y) = \varphi((x - a)(y - a) + a)$

$$= \frac{1}{(x - a)(y - a) + a - a}$$

$$= \frac{1}{(x - a)(y - a)}$$

$$= \frac{1}{x - a} \times \frac{1}{y - a}$$

$$= \varphi(x) \times \varphi(y)$$

ومنه φ تشاكل.

ليكن y من IR_+^* . نعتبر المعادلة :

$$x \in I ; \varphi(x) = y$$

$$\varphi(x) = y \Leftrightarrow \frac{1}{x - a} = y$$

$$\Leftrightarrow x - a = \frac{1}{y} \quad (y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow x = a + \frac{1}{y}$$

$$(\text{بما أن } y \in IR_+^* \text{ فإن } a + \frac{1}{y} > a)$$

$$\text{إذن : } \forall y \in IR_+^* ; \exists ! x \in I ; \varphi(x) = y$$

وبالتالي : φ تقابل.

ومنه المطلوب.

التمرين الثالث :

الجزء الأول :

1- نتحقق أن $z_1 = -m + 2$ حل للمعادلة (E_m)

لدينا :

$$(E_m): z^2 + [(1-i)m - 4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

ومنه : $(-m + 2)^2 + [(1-i) - 4](-m + 2) - im^2 - 2(1-i)m + 4$

$$= -im^2 - 2(1-i)m + 4$$

$$= 4 - 4m + m^2 - (1-i)m^2 + 2(1-i)$$

$$+ 4 - 8 - im^2 - 2m + 2im + 4$$

$$= -6m + m^2 - m^2 + im^2 + 2m$$

$$- 2im + 4m - im^2 + 2im$$

$$= 0$$

إذن $z_1 = -m + 2$ حل للمعادلة (E_m)

2- ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m)

أ- لنبين التكافؤ :

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

z_1 و z_2 حلا للمعادلة (E_m) :

$$z_1 z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-im^2 - 2(1-i)m + 4}{1}$$

$$z_1 z_2 = -im^2 - 2(1-i)m + 4$$

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m + 4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + im^2 - 2(1-i)m - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow im^2 + 2(1-i)m - 3 = 0$$

ومنه المطلوب .

ب- لنحدد قيمتي m بحيث : $z_1 z_2 = 1$

$$z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow -im^2 - 2(1-i)m - 3 = 0$$

$$\Delta' = (1-i)^2 + 3i$$

$$\Delta' = -2i + 3i = i$$

$$\Delta' = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right)^2$$

نتحقق بقسمات متتالية أن العدد 2011 لا يقبل القسمة على p ومنه 2011 أولي .

* لدينا :

$$N = \frac{111 \dots 11}{2010}$$

$$= 10^{2009} + 10^{2008} + \dots + 10 + 1$$

$$= \frac{10^{2010} - 1}{10 - 1} \quad \left(\begin{array}{l} \text{مجموع حدود متتالية} \\ \text{للتناهي هندسية} \end{array} \right)$$

$$= \frac{10^{2010} - 1}{9}$$

$$10^{2010} - 1 = 9N \quad \text{ومنه :}$$

ب- لنبين أن العدد 2011 يقسم $9N$

لدينا : 2011 أولي و $10 \wedge 2011 = 1$

إذن باستعمال مبرهنة فيرما

$$10^{2010} \equiv 1[2011] \quad \text{نجد أن :}$$

$$10^{2010} - 1 \equiv 0[2011] \quad \text{ومنه :}$$

$$2011 \mid 10^{2010} - 1 \quad \text{إذن :}$$

$$2011 \mid 9N \quad \text{ومنه :}$$

ج- استنتاج :

$$2011 \mid 9N \quad \text{لدينا :}$$

$$10 \wedge 9 = 1 \quad \text{و}$$

إذن حسب مبرهنة كوكس فإن : $2011 \mid N$

3- لنبين أن العدد N يقبل القسمة على 22121

$$2011 \mid N \quad \text{لدينا :}$$

$$10 \wedge 11 = 1 \quad \text{و}$$

$$2011 \wedge 11 \mid N \quad \text{إذن :}$$

$$22121 \mid N \quad \text{وبالتالي :}$$

* طبيعة المثلث $AM'M''$: لدينا : $\frac{z'' - 2}{z' - 2} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

ومنه : $\frac{Z_{M''} - Z_A}{Z_{M'} - Z_A} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\left| \frac{Z_{M''} - Z_A}{Z_{M'} - Z_A} \right| = 1$

$\arg\left(\frac{Z_{M''} - Z_A}{Z_{M'} - Z_A}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

ومنه : $\begin{cases} AM'' = AM' \\ (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AM''}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

إذن $AM'M''$ مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية في A .

تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة إذا وفقط إذا كان

$\frac{Z_{M''} - Z_A}{Z_{M'} - Z_A} \times \frac{Z_{M'} - Z_\Omega}{Z_{M'} - Z_\Omega} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{z'' - 2}{z' - 2} \times \frac{z' - 1 - i}{z'' - 1 - i} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -i \left(\frac{-(z - 1) - i}{i\bar{z} + 2 - 1 - i} \right) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -i \left(\frac{-z + 1 - i}{i\bar{z} + 1 - i} \right) \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{i\bar{z} - i - 1}{i\bar{z} + 1 - i} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{i\bar{z} - i - 1}{i\bar{z} + 1 - i} \right) = \overline{\left(\frac{i\bar{z} - i - 1}{i\bar{z} + 1 - i} \right)}$

$\Leftrightarrow \frac{i\bar{z} - 1 - i}{i\bar{z} + 1 - i} = \frac{-i\bar{z} - 1 + i}{i\bar{z} + 1 - i}$

$\Leftrightarrow (i\bar{z} - 1 - i)(-i\bar{z} + 1 + i) =$

$(i\bar{z} + 1 - i)(-i\bar{z} - 1 + i)$

$\Leftrightarrow i\bar{z} + i\bar{z} - 2i = -i\bar{z} - i\bar{z} + 2i$

$\Leftrightarrow i(Z + \bar{Z}) + i(Z + \bar{Z}) + 4i = 0$

$\Leftrightarrow 2i(Z + \bar{Z}) + 4i = 0$

إذن : $m_1 = \frac{1 - i + \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}{-i}$

$m_2 = \frac{1 - i - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)}{-i}$

$\begin{cases} m_1 = i + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ m_2 = i + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}i + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} m_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ m_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{cases}$

الجزء الثاني :

1- أ- لدينا : $S(M) = M' \Leftrightarrow Z' - 1 = -(Z - 1)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM'} = -\overrightarrow{IM}$

(حيث I النقطة التي لحقها 1)

إذن S هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة I

ب- لنبين أن : $z'' = iz + 2$

لدينا : $R(M) = M'' \Leftrightarrow Z'' - w = e^{i\frac{\pi}{2}}(Z - w)$

(حيث $w = 1 + i$)

$\Leftrightarrow Z'' = i(Z - w) + w$

$\Leftrightarrow Z'' = iZ + (1 - i)w$

$\Leftrightarrow Z'' = iZ + (1 - i)(1 + i)$

$\Leftrightarrow Z'' = iZ + 2$

ومنه المطلوب .

2- أ- لنحسب : $\frac{z'' - 2}{z' - 2}$

$\frac{z'' - 2}{z' - 2} = \frac{iZ + 2 - 2}{(Z' - 1) - 1}$

$= \frac{iZ}{-(Z - 1) - 1}$

$= \frac{iZ}{-Z + 1 - 1}$

$= \frac{iZ}{-Z} = -i$

$$\forall x \in D - \{0\} f'(x) = \frac{\ln x - x \times \frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = e$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\ln x - 1$

$$\ln x < 0 : 0 < x < 1$$

$$\text{ومنه } \ln x - 1 < 0 \text{ أي } f'(x) < 0$$

إذن f تناقصية قطعاً على $]0, 1[$

$$f'(x) > 0 \text{ ومنه } x > e \Leftrightarrow \ln x - 1 > 0 \text{ } x > 1$$

$$f'(x) < 0 \text{ ومنه } 1 < x < e \Leftrightarrow \ln x - 1 < 0$$

إذن f تناقصية قطعاً على $]1, e[$ و تزايدية قطعاً على المجال

$]e, +\infty[$ ومنه جدول تغيرات

x	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	0	-	- 0 +	+
$f(x)$	0		$+\infty$	$+\infty$

5- لدينا :

$$\forall x \in D - \{0\} f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

$$f''(x) = \frac{\frac{1}{x} \ln^2 x - (\ln x - 1) \cdot \frac{x}{2} \ln x}{\ln^4 x}$$

$$f''(x) = \frac{\ln x - 2(\ln x - 1)}{x \ln^3 x}$$

$$f''(x) = \frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x}$$

$$f''(x) = \left(\frac{-\ln x + 2}{\ln x} \right) \cdot \frac{1}{x \ln^2 x}$$

لدينا :

$$\Leftrightarrow 2i(2 \operatorname{Re}(Z) + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4i(\operatorname{Re}(Z) + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) + 1 = 0$$

نضع

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; Z = x + iy$$

$$\operatorname{Re}(Z) + 1 = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = -1 \Leftrightarrow x = -1 : \text{ ومنه :}$$

إذن : مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M'

M'' متداورة هي المستقيم (Δ) الذي معادلته $x = -1$

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

$$D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$$

ليكن :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

$$\forall x \in D - \{0\}; e^x = x^n \Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(x^n)$$

$$\Leftrightarrow x = n \ln x$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} = n \quad (\ln x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow f(x) = n$$

ومنه المطلوب .

2- لنبين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\ln x} = 0 \quad (\lim_{0^+} \ln x = -\infty)$$

إذن الدالة قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_d(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty \quad (\lim_{1^-} \ln x = 0^-)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{\ln x} = +\infty \quad (\lim_{1^+} \ln(x) = 0^+)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+ \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$$

(C) يقبل مقارب عمودي معادلته $x = 1$

(C) يقبل فرعاً شلجماً اتجاهه محور الأفاسيل بجوار $+\infty$

يعني : $(f(b_n) = n) \quad f(b_n) < b_n$

ومنه : $n < b_n$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$

أ-2- لدينا : $\forall n \geq 3 \quad 1 < a_n < e$

$\forall n \geq 3 \quad f(a_n) = n \quad f(a_{n+1}) = n+1$

ومنه : $\forall n \geq 3 \quad f(a_{n+1}) > f(a_n)$

وبما أن الدالة f تناقصية قطعاً على المجال $]1, e[$

$a_{n+1} < a_n$

ومنه $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية قطعاً .

لدينا $(a_n)_{n \geq 3}$ تناقصية قطعاً ومصغرة بالعدد 1 فهي إذن متقاربة .

ب- لدينا $\forall n \geq 3 \quad f(a_n) = n$ إذن $a_n^n = e^{a_n}$

ومنه : $\ln(a_n^n) = \ln(e^{a_n})$

يعني : $n \ln(a_n) = a_n$

ولدينا : $1 < a_n < e$ إذن $1 < n \ln(a_n) < e$

ومنه : $\frac{1}{n} < \ln(a_n) < \frac{e}{n}$

أي : $e^{\frac{1}{n}} < a_n < e^{\frac{e}{n}}$

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e}{n} = 0$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n}} = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{e}{n}} = 1$

ومنه فإن : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1}$

ج- لدينا : $\forall n \geq 3 \quad a_n^n = e^{a_n}$

لدينا $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ والدالة $\exp$ متصلة على $\mathbb{R}$ وخصوصاً في 1

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n} = e^1 = e$

ومنه المطلوب .

إشارة $f''(x)$ هي إشارة $\frac{-\ln x + 2}{\ln x}$

x	0	1	e^2	$+\infty$
$-\ln x + 2$	+	+	0	-
$\ln x$	-	0	+	+
$\frac{-\ln x + 2}{\ln x}$	-	+	0	-

الدالة f'' تنعدم في e^2 مع تعبير الإشارة إذن النقطة $(e^2, \frac{e^2}{2})$ هي نقطة انعطاف (C).

6- إنشاء (C) :

7- من خلال منحنى الدالة f نلاحظ أن المستقيم الذي معادلته $y=n$ يقطع (C) في نقطتين أفصولييهما a_n و b_n ($n \geq 3$)

حيث $1 < a_n < e < b_n$

الجزء الثاني :

لدينا : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \quad b_n > e$

ومنه : $\ln(b_n) > 1$

ومنه : $\frac{1}{\ln(b_n)} < 1$

$\frac{b_n}{\ln(b_n)} < b_n$

ومنه :
 $\forall x \geq 0 ; \int_0^x e^{-t^2} dt = [U(t)]_0^x = U(x) - U(0)$
 ومنه :
 $\forall x \geq 0 \quad F(x) = e^{-x^2} (U(x) - U(0))$
 إذن F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$ (كجاء دالتين قابلتين للإشتقاق)
 ولدينا :
 $\forall x \geq 0 \quad F'(x) = (e^{-x^2})' \cdot (U(x) - U(0)) + e^{-x^2} (U(x) - U(0))'$
 $F'(x) = -2xe^{-x^2} (U(x) - U(0)) + (e^{-x^2})' \cdot U'(x)$
 $F'(x) = -2xF(x) + e^{-x^2} \cdot (e^{-x^2})' \quad (U'(x) = e^{-x^2})$
 $F'(x) = -2xF(x) + e^{-2x^2}$

$F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$: أي :
 ومنه المتساوية المطلوبة .

3- لدينا : $G(x) = F(\tan x) ; 0 \leq x < \frac{\pi}{2}$
 $G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

أ- إثبات أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$

لنحسب : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} G(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} G(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} F(\tan x)$$

$\tan x = X$: نضع :

$$x \mapsto \frac{\pi}{2} \Rightarrow X \mapsto +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 = G\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

إذن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$

ب- لدينا : $G(x) = F(\tan x) \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$G(x) = F \circ \tan(x)$$

الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$$\tan \left[0, \frac{\pi}{2}\right] = [0, +\infty[\quad \text{و } F \text{ متصلة على } [0, +\infty[$$

إذن G متصلة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ وبما أن G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$

التمرين الخامس :

1- لدينا : $\forall x \geq 0 \quad F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$

أ- إثبات أن : $(\forall x \geq 0) \quad 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$
 نعلم أن :

$$(e^{-t^2} \leq 1 \Leftrightarrow -t^2 \leq 0) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad 0 < e^{-t^2} \leq 1$$

$$\forall x \geq 0 \quad 0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq \int_0^x 1 dt$$

$$0 \leq \int_0^x e^{-t^2} dt \leq x \quad \text{ومنه :}$$

ومنه :

$$(\forall x \geq 0; e^{-x^2} > 0) \quad 0 \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt \leq xe^{-x^2}$$

$$0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \quad \text{يعني :}$$

ب- لدينا : $\forall x \geq 1 \quad x^2 \geq x$

$$-x^2 \leq -x \quad \text{ومنه :}$$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x} \quad \text{ومنه :}$$

ولدينا :

$$0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2} \quad \text{إذن } 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$$

ولدينا من جهة أخرى :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -((-x)e^{-x^2}) = 0$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x^2} = 0 \quad \text{لأن :})$$

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \leq 0 \quad \text{ومنه :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 \quad \text{إذن :}$$

ومنه المطلوب .

2- إثبات أن F قابلة للإشتقاق على $[0, +\infty[$

وتحديد $F'(x)$ ($\forall x \geq 0$)

$$\text{لدينا : } \forall x \geq 0 \quad F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ولدينا الدالة $t \mapsto e^{-t^2}$ متصلة على المجال $[0, +\infty[$

إذن تقبل دالة أصلية عليه U

إذن الدالة H تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$

ب- لدينا : $F'(c) = 0$

ولدينا $H(c) = \frac{F'(c)e^{c^2}}{2c}$ إذن $H(c) = 0$

بما أن H تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$

$\exists ! c > 0 / H(c) = 0$

أي $\frac{F'(c).e^{c^2}}{2c} = 0$ ومنه $F'(c) = 0$

لدينا H تناقصية على المجال $]0, +\infty[$

إذا كان $x \leq c$ فإن $H(x) \geq H(c)$

$$\frac{F'(x).e^{x^2}}{2x} \geq 0 \Rightarrow F'(x) \geq 0$$

إذن F تزايدية على المجال $]0, c[$

إذا كان $x \geq c$ فإن $H(x) \leq H(c)$

$$\frac{F'(x).e^{x^2}}{2x} \leq 0 \Rightarrow F'(x) \leq 0$$

إذن F تناقصية على المجال $[c, +\infty[$

ومنه جدول تغيرات الدالة F

x	0	c	$+\infty$
$F'(x)$		+	-
$F(x)$	0	$\frac{e^{-2c^2}}{2c}$	0

فإن الدالة G متصلة على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

و بنفس الطريقة نبين أن الدالة G قابلة للاشتقاق على المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

لدينا : $G(0) = G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

إذن حسب مبرهنة رول : $\exists \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[/ G'(\alpha) = 0$

$\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \exists c \in]0, +\infty[/ \alpha = \tan c$

$\exists c \in]0, +\infty[/ G'(\tan c) = 0$

$$(1 + \tan^2 c)F'(c) = 0$$

يعني : $F'(c) = 0$

ولدينا : $F'(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-2c^2} - 2cF(c) = 0$

$$\Leftrightarrow F(c) = \frac{e^{-2c^2}}{2c}$$

ومنه المطلوب .

$$\forall x > 0 \quad H(x) = F'(x) \frac{e^{x^2}}{2x}$$

لدينا :

$$F'(x) = e^{-2x^2} = 2xF(x)$$

لدينا :

$$\forall x > 0 \quad \frac{F'(x)}{2x} = \frac{e^{-2x^2}}{2x} - F(x)$$

ومنه :

$$\frac{F'(x)}{2x} . e^{x^2} = \frac{e^{-2x^2}}{2x} \times e^{x^2} - e^{x^2} . F(x)$$

ومنه :

$$H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - e^{x^2} \times e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

يعني :

$$H(x) = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_0^x e^{-t^2} dt$$

ومنه :

$$\forall x > 0 \quad H'(x) = \frac{-2x^{-x^2} \times 2x - 2e^{-x^2}}{(2x)^2} - e^{-x^2}$$

$$H'(x) = \frac{-2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}}{2x^2} - e^{-x^2}$$

$$= \frac{-2x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2}}{2x^2}$$

$$H'(x) = \frac{-4x^2 e^{-x^2} - e^{-x^2}}{2x^2}$$

$$= \frac{-e^{-x^2}(4x^2 + 1)}{2x^2} < 0$$