

$$a * b = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2} \quad \text{لدينا :}$$

$$a * b - 1 = \sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2} - 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2 - 1}{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2} + 1}$$

$$= \frac{(a^2 - 1)(b^2 - 1)}{\sqrt{a^2 b^2 - a^2 - b^2 + 2} + 1}$$

$$b \in I \quad \text{و} \quad a \in I \quad \text{وبما أن}$$

$$b^2 \in I \quad \text{و} \quad a^2 \in I \quad \text{فإن}$$

$$b^2 - 1 > 0 \quad \text{و} \quad a^2 - 1 > 0 \quad \text{ومنه}$$

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) > 0 \quad \text{إذن}$$

$$(a * b) - 1 > 0 \quad \text{وهذا يعني أن :}$$

$$a * b \in I \quad \text{أي :}$$

ومنه المطلوب .

(3) أ- لنبين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(R^{*+}, \times)$ نحو

$(I, *)$

$$\varphi(x \times y) = \sqrt{xy + 1} \quad \bullet \text{ لدينا من جهة :}$$

ومن جهة أخرى :

$$\varphi(x) * \varphi(y) = \sqrt{\varphi(x)^2 \varphi(y)^2 - \varphi(x)^2 - \varphi(y)^2 + 2}$$

$$= \sqrt{(x+1)(y+1) - (x+1) - (y+1) + 2}$$

$$= \sqrt{xy + x + y - x - y - 1 + 2}$$

$$= \sqrt{xy + 1}$$

$$\varphi(x \times y) = \varphi(x) * \varphi(y) \quad \text{ومنه :}$$

$$\varphi(x) = y \quad \bullet \text{ لدينا : المعادلة}$$

$$y \in I ; x \in R^{*+} \quad \text{حيث :}$$

$$\sqrt{x+1} = y \quad \text{تكافئ :}$$

$$\Leftrightarrow x+1 = y^2$$

$$\Leftrightarrow x = y^2 - 1 \in R^{*+}$$

Achamel.info

التمرين الأول :

- I

1- حساب $I - A$:

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حساب A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{5}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I - A = A^2 \quad \text{ومنه :}$$

حسب السؤال 1 لدينا :

$$A^2 = I - A$$

$$\Leftrightarrow A^2 + A = I$$

$$\begin{cases} A(A + I) = I \\ \text{et } (A + I)A = I \end{cases}$$

$$\text{إذن } A \text{ تقبل مقلوبا هو المصفوفة}$$

$$A^{-1} = A + I$$

- II

1- التحقق من المتساوية :

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) + 1$$

$$= x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 1 + 1$$

$$= x^2 y^2 - x^2 - y^2 + 2$$

ومنه المطلوب .

2- لنبين أن * قانون تركيب داخلي في I

ليكن a و b عنصرين من I

$$Z_1 = \frac{-(2-i)a + ia}{2i} = \frac{-2a + ia + ia}{2i}$$

$$Z_1 = \frac{-2a + 2ia}{2i} = \frac{-a + ia}{i} = \frac{i(a + ia)}{i}$$

$$Z_1 = a(1 + i)$$

$$Z_2 = \frac{-(2-i)a - ia}{2i} = \frac{-2a + ia - ia}{2i} = ia$$

$$z_1 z_2 = ia \cdot a(1 + i) = a^2(i + i^2) = a^2(i - 1)$$

ب- $z_1 z_2$ عدد حقيقي .

$$\arg(z_1 z_2) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2(i - 1)) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a^2) + \arg(i - 1) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(a) + \frac{3\pi}{4} \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow 2\arg(a) \equiv -\frac{3\pi}{4} \equiv [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(a) \equiv -\frac{3\pi}{8} \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

-2- أ-

إذن :

- II

1- أ- M و D و A مستقيمة

$$\frac{Z_M - Z_D}{Z_M - Z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{Z - ic}{Z - 1} \right) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\overline{\left(\frac{Z - ic}{Z - 1} \right)} = \frac{Z - ic}{Z - 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{Z} + ic}{\bar{Z} - 1} = \frac{Z - ic}{Z - 1}$$

$$\Leftrightarrow (\bar{Z} + ic)(Z - 1) = (\bar{Z} - 1)(Z - ic)$$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)Z + (ic - 1)\bar{Z} = 2ic$$

ومنه المطلوب .

ومنه المعادلة $\varphi(x) = y$ تقبل حلا وحيدا في R^{*+}

إذن φ تشاكل تقابلي من $(R^{*+}, \times)$ نحو $(I, *)$

ب- بما أن $(R^{*+}, \times)$ زمرة تبادلية

فإن $(I, *)$ زمرة تبادلية .

ج- لنبين أن : $\Gamma = \{ \sqrt{1 + 2^m} / m \in \mathbb{Z} \}$ زمرة جزئية لـ

$(I, *)$

لدينا : $\sqrt{1 + 2^0} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2} \in I$

$$\sqrt{1 + 2^0} \in \Gamma$$

و

$$\Gamma \neq \emptyset$$

إذن :

- لدينا $\sqrt{2}$ هو العنصر المحايد في $(I, *)$ وكل عنصر x من

$$I \text{ له مماثل هو : } x' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (\mathbb{C}(1) = \sqrt{2})$$

ليكن x من Γ و y من Γ و y' و y' مماثل y .

$$x = \sqrt{1 + 2^m}, m \in \mathbb{Z}$$

لدينا :

$$y = \sqrt{1 + 2^{m'}}, m' \in \mathbb{Z}$$

$$y' = \frac{\sqrt{1 + 2^{m'}}}{\sqrt{1 + 2^{m'} - 1}} = \frac{\sqrt{1 + 2^{m'}}}{\sqrt{2^{m'}}}$$

$$= \sqrt{1 + 2^{-m'}}$$

$$x * y' = \sqrt{(x^2 - 1)(y'^2 - 1) + 1}$$

إذن :

$$= \sqrt{(1 + 2^m - 1)(1 + 2^{-m'} - 1) + 1}$$

$$= \sqrt{2^m \cdot 2^{-m'} + 1}$$

$$= \sqrt{1 + 2^{m-m'}} \in \Gamma$$

إذن $(\Gamma, *)$ زمرة جزئية لـ $(I, *)$.

التمرين الثاني :

$$(E) : iz^2 + (2 - i)az - (1 + i)a^2 = 0 \quad \text{I -}$$

1- لنحدد z_1 و z_2 حلي (E) :

$$\Delta = a^2(2 - i)^2 + 4i(1 + i)a^2$$

$$= a^2(4 - 4i - 1) + 4ia^2 - 4a^2$$

$$= 4a^2 - 4a^2i - a^2 + 4ia^2 - 4a^2$$

$$= -a^2 = (ia)^2$$

ب- لدينا : $h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$

$$\Leftrightarrow \frac{h - (1 + i)}{h - c} = \frac{i}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_H - Z_B}{Z_H - Z_C} = \frac{i}{c} \in i\mathbb{R} \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow (BH) \perp (CH)$$

التمرين الثالث :

1) أ- باستعمال القسمة المتتالية للعددين 143 و 195 نستنتج

$$195 \wedge 143 = 13 \quad \text{أن}$$

$$195 \wedge 143 = 13 \quad \text{بما أن :}$$

إذن يوجد (u, v) من $\mathbb{Z}^2$ بحيث : $(143u - 195v = 13)$

وبالضرب في 4 لطريق المتساوية نجد : $143x - 195y = 52$

ومن المعلوم . $(x = 4u, y = 4v)$

ب- علما أن $(-1, -1)$ حل خاص للمعادلة :

$$143x - 195y = 52$$

$$\text{إذن : } 143x - 195y = 143(-1) - 195(-1)$$

$$\Leftrightarrow 143(x + 1) = 195(y + 1)$$

$$\Leftrightarrow 11(x + 1) = 15(y + 1)$$

$$11 \wedge 15 = 1 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\frac{11}{y+1} \quad \text{فإن :}$$

$$(\exists k \in \mathbb{Z}) ; y + 1 = 11k \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}) ; y = 11k - 1$$

وبالتعويض في المعادلة :

$$11(x + 1) = 15(y + 1)$$

$$11(x + 1) = 15 \times 11k \quad \text{نجد :}$$

$$x + 1 = 15k$$

$$x = 15k - 1$$

ومن مجموعة حلول المعادلة (E) هي :

$$S = \{(15k - 1 ; 11k - 1) / k \in \mathbb{Z}\}$$

ب- $(OM) \perp (AD)$

$$\Leftrightarrow \frac{Z_M - Z_O}{Z_D - Z_A} \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{Z}{ic - 1} \right) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{Z}{ic - 1} \right) = \frac{-Z}{ic - 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\bar{Z}}{-ic - 1} = \frac{-Z}{ic - 1}$$

$$\Leftrightarrow \bar{Z}(ic - 1) = Z(ic + 1)$$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)Z + (1 - ic)\bar{Z} = 0$$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)Z - (ic - 1)\bar{Z} = 0 \quad \text{أي :}$$

2- H هو المسقط العمودي للنقطة O على المستقيم (AD) :

أ- لدينا من جهة :

$(OH) \perp (AD)$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)h - (ic - 1)\bar{h} = 0$$

$$\Leftrightarrow (ic - 1)\bar{h} = (ic + 1)h$$

$$\Leftrightarrow \bar{h} = \left(\frac{ic + 1}{ic - 1} \right) h$$

ولدينا من جهة أخرى A و H و D مستقيمية :

$$\Leftrightarrow (ic + 1)h + (ic - 1)\bar{h} = 2ic$$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)h + (ic + 1)h = 2ic$$

$$\Leftrightarrow 2(ic + 1)h = 2ic$$

$$\Leftrightarrow (ic + 1)h = ic$$

$$\Leftrightarrow i(c - i)h = ic$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(c - i)h = c} \quad (1)$$

ولدينا :

$$h - (1 + i) = \frac{i}{c}(h - c)$$

$$\Leftrightarrow ch - c(1 + i) = i(h - c)$$

$$\Leftrightarrow ch - c - ic = ih - ic$$

$$\Leftrightarrow ch - c - ih = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(c - i)h = c} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج المطلوب .

التمرين الرابع :

1- * لدينا : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \frac{1}{e^x \cdot n} = +\infty$

(لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$)

* لدينا : $f_n(x) = x + \frac{e^{-x}}{n}$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{e^{-x}}{n}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{n \cdot e^x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{n x e^x + 1}{n \cdot e^x} = +\infty$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} n x e^x + 1 = 1$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} n e^x = 0^+$

2- أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \frac{e^{-x}}{n}}{x}$

و $= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} + \frac{1}{n x e^x}$

$= \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{n x e^x} = -\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$)

إذن (C_n) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتايب بجوار $-\infty$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n e^x} = 0$

إذن المستقيم الذي معادلته $y = x$ مقارب مائل لـ (C_n) جوار $-\infty$

* بما أن $f(x) - x = \frac{1}{n e^x} > 0$

فإن (C_n) يوجد فوق (D)

3- لدينا f_n دالة قابلة للاشتقاق على IR ولكل x من IR :

$f'_n(x) = 1 - \frac{e^{-x}}{n}$

$= \frac{n e^x - 1}{n e^x}$

2- لدينا : $1 = 5 \wedge n$ و 5 أولي إذن حسب مبرهنة فيرما :

$n^4 \equiv 1[5]$

ومنه $(\forall k \in IN); (n^4)^k \equiv 1^k[5]$

إذن : $n^{4k} \equiv 1[5]$

3- أ- لدينا :

$x \equiv y [4]$

$\Leftrightarrow (x - y) \equiv 0[4]$

$\Leftrightarrow (\exists k \in IN); x - y = 4k$

نعلم أن : $n^{4k} \equiv 1[5]$

إذن : $n^{(x-y)} \equiv 1[5]$

$n^y \cdot x^{(x-y)} \equiv n^y[5]$

$n^x \equiv n^y[5]$

ب- استنتاج :

لدينا : $n^x \equiv n^y [2]$

(لأن n^x و n^y لهما نفس الزوجية)

و $2 \wedge 5 = 1$ و $n^x \equiv n^y [5]$

إذن : $n^x \equiv n^y [5 \times 2]$

أي : $n^x \equiv n^y [10]$

4- ليكن (x, y) حلاً للمعادلة (E)

إذن يوجد k من IN بحيث :

$x = 11k - 1, y = 15k - 1$

إذن : $y - x = 15k - 1 - 11k + 1$

$y - x = 4k \quad \forall k \in IN$

وبما أن $4k$ يقبل القسمة على 4

فإن $y - x \equiv 0[4]$

$x \equiv y[4]$

إذن حسب ما سبق $n^x \equiv n^y[10]$

ومنه المطلوب .

5- أ- لنبين أن: $n \geq 3 \Rightarrow \frac{e}{n} < \ln n$

$n \geq 3 \Rightarrow \frac{e}{n} < 1 < \ln(3) \leq \ln(n)$

ومنه المطلوب .

ب- إذا كان: $n \geq 3$ فإن $\ln(n) \geq \ln(3)$

ومنه: $1 - \ln(n) \leq 1 - \ln(3) < 0$

* على المجال $]-\infty, -\ln(n)]$ ، لدينا f_n دالة متصلة كمجموع دالتين متصلتين و تناقصية قطعاً و :

$f_n(]-\infty, -\ln(n)]) = [1 - \ln(n); +\infty[$

و $0 \in [1 - \ln(n); +\infty[$

إذن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً x_n بحيث

$x_n \leq -\ln(n)$

* على المجال $[-\ln(n); +\infty[$

لدينا f_n دالة متصلة و تزايدية قطعاً و

$f_n([-\ln(n), +\infty[) = [1 - \ln(n); +\infty[$

$0 \in [1 - \ln(n); +\infty[$

إذن المعادلة $f_n(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً y_n بحيث

$y_n \geq -\ln(n)$

بما أن: $f_n(0) = \frac{1}{n} > 0$

و $f_n\left(\frac{-e}{n}\right) = \frac{-e}{n} + \frac{e^{-\frac{e}{n}}}{n}$
 $= \frac{1}{n}(e^{-\frac{e}{n}} - e) < 0$
 (لأن: $1 > \frac{-e}{n}$)

ولدينا: $\frac{-e}{n} > -\ln(n) \Leftrightarrow \frac{e}{n} < \ln(n)$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن:

$\frac{-e}{n} \leq y_n \leq 0$

ج- * لدينا: $x_n \leq -\ln(n)$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

وحيث أن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(n) = -\infty$

بما أن: $(\forall x \in \mathbb{R}) ; ne^x > 0$

فإن إشارة $f'_n(x)$ هي إشارة $ne^x - 1$

$ne^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow x = -\ln(n)$

* إذا كان $x > -\ln(n)$ فإن $e^x > \frac{1}{n}$

ومنه $ne^x - 1 > 0$ أي $f'_n(x) > 0$

إذن f'_n تزايدية قطعاً على المجال $[-\ln(n); +\infty[$

* إذا كان $x < -\ln(n)$ فإن $e^x < \frac{1}{n}$

ومنه $ne^x - 1 < 0$ أي $f'_n(x) < 0$

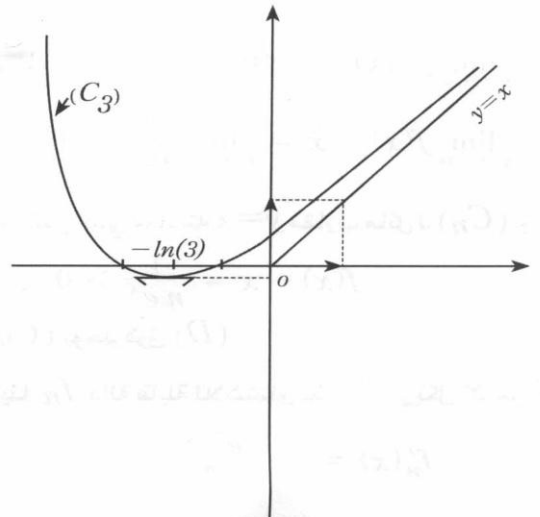
إذن f_n تناقصية قطعاً على المجال $]-\infty, -\ln(n)]$

* جدول تغيرات f_n هو:

x	$-\infty$	$-\ln(n)$	$+\infty$
$f'_n(x)$	-	0	+
$f_n(x)$	$+\infty$	$1 - \ln(n)$	$+\infty$

$f_n(-\ln(n)) = -\ln(n) + \frac{e^{\ln(n)}}{n}$
 $= 1 - \ln(n)$

4- إنشاء (C_3) :



و g متصلة على اليمين في 0
إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{x_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} g\left(-\frac{1}{x_n}\right)$
 $= g(0) = -1$

التمرين الخامس :

$$F(0) = 1$$

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}, x \in]0,1]$$

1- ليكن x من $[0,1]$

$$t \in [0,x] \Leftrightarrow 0 \leq t \leq x$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 2t \leq 2x$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq 1+2t \leq 1+2x$$

$$(1+2x > 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+(2x)} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

2- ليكن x من $]0,1]$

$$\int_0^x \frac{t}{1+2t} dt \quad \text{أ- لدينا :}$$

$$= \int_0^x \frac{1}{2} \left(\frac{2t+1-1}{1+2t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+2t} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \ln|1+2t| \right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \ln(1+2x) \right]$$

$$= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln(1+2x)$$

$$\frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt \quad \text{و منه :}$$

$$= \frac{2}{x^2} \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln(1+2x) \right]$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2} = F(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \quad \text{فإن :}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad -\frac{e}{n} \leq y_n \leq 0 \quad \text{* لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{e}{n} = 0 \quad \text{وبما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y_n = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\begin{cases} g(x) = -1 - x \ln x ; x > 0 \\ g(0) = -1 \end{cases} \quad -6$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 - x \ln(x) = -1 \quad \text{أ- لدينا :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} -x \ln(x) = 0 \quad \text{لأن :} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) \quad \text{إذن :}$$

ومنه g متصلة على اليمين في 0.

$$g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1 + \frac{1}{x_n} \ln\left(-\frac{1}{x_n}\right) \quad \text{ب-}$$

$$= -1 - \frac{\ln(x_n)}{x_n}$$

$$f_n(x_n) = 0 \quad \text{ونعلم أن :}$$

$$\Leftrightarrow x_n + \frac{e^{-x_n}}{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow -x_n = \frac{e^{-x_n}}{n}$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x_n) = \ln\left(\frac{e^{-x_n}}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x_n) = \ln(e^{-x_n}) - \ln(n)$$

$$\Leftrightarrow \ln(-x_n) = -x_n - \ln(n)$$

$$g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = -1 + \frac{x_n + \ln(n)}{x_n} \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{\ln(n)}{x_n}$$

$$g\left(-\frac{1}{x_n}\right) = \frac{\ln(n)}{x_n} \quad \text{ج- لدينا :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{x_n} = 0 \quad \text{و :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty \quad \text{لأن}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2x}{x^2(1+2x)} - \frac{2}{x} \cdot \frac{2}{x^2} \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt \\
 &= \frac{2}{x(1+2x)} - \frac{2}{x^3} \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt \\
 &= \frac{2}{x(1+2x)} - \frac{2}{x^3} \left[\frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \right] \\
 &= \frac{-4}{x^3} \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt
 \end{aligned}$$

ب- نعلم أن: $\forall x \in [0,1]; \forall t \in [0,x];$

$$\frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2t} \leq 1$$

$$\frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t \quad \text{إذن:}$$

$$\left(\frac{t}{1+2x} \right)^2 \leq \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 \leq t^2 \quad \text{ومنه:}$$

$$\int_0^x \left(\frac{t}{1+2x} \right)^2 dt \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \leq \int_0^x t^2 dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \leq \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1+2x)^2} \cdot \frac{x^3}{3} \leq \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \leq \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{x^3} \cdot \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{(1+2x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{3} \leq F'(x) \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$$

ج- لدينا F متصلة كمجموع و خارج دوال متصلة على $[0,1]$ وقابلة للاشتقاق على $]0,1[$

إذن بتطبيق مبرهنة التزايد المتتالية على الدالة F في المجال $[0,x]$

فإنه يوجد c من $]0,x[$

$$F(x) - F(0) = (x - 0)F'(c) \quad \text{بحيث:}$$

$$\frac{F(x) - F(0)}{x} = F'(c) \quad \text{أي:}$$

$$\frac{-4}{3} \leq F'(c) \leq \frac{-4}{3(1+2c)^2} \quad \text{ونعلم أن:}$$

ب- نعلم أن: $\forall x \in [0,1]; \forall t \in [0,x];$

$$\frac{t}{1+2x} \leq \frac{t}{1+2t} \leq t$$

$$\int_0^x \frac{t}{1+2x} dt \leq \int_0^x \frac{t}{1+2t} dt \leq \int_0^x t dt \quad \text{إذن:}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \int_0^x t dt \leq \frac{x^2}{2} F(x) \leq \int_0^x t dt$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x \leq \frac{x^2}{2} F(x) \leq \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \cdot \frac{x^2}{2} \leq \frac{x^2}{2} F(x) \leq \frac{x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+2x} \leq F(x) \leq 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+2x} = 1 \quad \text{بما أن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 1 = F(0) \quad \text{فإن:}$$

إذن F متصلة على اليمين في 0.

$$\begin{cases} u'(t) = \frac{-2}{(1+2t)^2} \\ v(t) = t^2 \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \begin{cases} u(t) = \frac{1}{1+2t} \\ v'(t) = 2t \end{cases} \quad \text{3- نضع:}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^x \frac{2t}{1+2t} dt &= \left[\frac{t^2}{1+2t} \right]_0^x + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt \\
 &= \frac{x^2}{1+2x} + 2 \int_0^x \left(\frac{t}{1+2t} \right)^2 dt
 \end{aligned}$$

4- لدينا:

$$F(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln(1+2x)}{2x^2}$$

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(1+2x)} + \frac{\ln(1+2x)}{x^3}$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(1+2x)} + \frac{2}{x} \cdot \left(\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(1+2x)} + \frac{2}{x} \left[\frac{1}{x} - F(x) \right]$$

$$= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2(1+2x)} + \frac{2}{x} F(x)$$

فإن : $\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2c)^2}$

ثم لدينا : $c \in]0, x[\Leftrightarrow 0 < c < x$

$\Leftrightarrow 1 < 1 + 2c < 1 + 2x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{1+2x} \leq \frac{1}{1+2c} < 1$

$\Leftrightarrow \frac{-4}{3} < \frac{-4}{3(1+2c)^2} < \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

ومنه : $\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

د- لدينا : $\frac{-4}{3} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-4}{3(1+2x)^2}$

و : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{3(1+2x)^2} = \frac{-4}{3}$

فإن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{-4}{3}$

ومنه F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ولدينا :

$$F'_d = \frac{-4}{3}$$