

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2008

حل التمرين الأول:

① - أ) لدينا : $f: x \mapsto x^3$ ، $D_f = \mathbb{R}$ الدالة $F: x \mapsto \frac{x^4}{4}$ هي دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ،

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3 \text{ لأن } (F' = f)$$

$$I = \int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{1}{4}(2^4 - 1) = \frac{15}{4}$$

② - حساب التكامل J :

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases} \quad \text{نضع} \quad \begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases}$$

$$J = \left[\frac{x^4}{4} \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^4}{4} \cdot \frac{1}{x} dx = 4 \ln 2 - \frac{1}{4} \int_1^2 x^3 dx$$

$$J = 4 \ln 2 - \frac{1}{4} I$$

$$\text{ومنه } J = 4 \ln 2 - \frac{15}{16}$$

حل التمرين الثاني:

① - إشارة الدالة g على المجال $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$:

x	$-\frac{5}{2}$	0	2	$\frac{5}{2}$
$g(x)$	-11	-	-	8

② - (-4) القيمة الدنوية النسبية للدالة g ، و 0 القيمة القصوى النسبية للدالة g .③ - تقاطع المنحنى (C) والمستقيم (Δ) :

$$(C) \cap (\Delta) = \{A(-2, -4); B(0, -2); C(2, 0)\}$$

تتمة حل التمرين رقم 2 :

④ - حل في $\left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ المتراجحة $g(x) \geq x - 2$:(مجالات x بحيث (C_g) يكون فوق (Δ)) مع أفاصيل نقاط التقاطع.مجموعة حلول المتراجحة هي : $S = [-2, 0] \cup \left[2, \frac{5}{2}\right]$

حل التمرين الثالث:

$$\begin{cases} u_0 = 30 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 20 \end{cases} \quad \text{لدينا : } n \in \mathbb{N}$$

① - أ) لدينا : $v_n = u_n - 25 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\text{ومنه } v_{n+1} = u_{n+1} - 25 = \frac{1}{5}u_n + 20 - 25$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{5}u_n - 5 = \frac{1}{5}(u_n - 25)$$

$$= \frac{1}{5}v_n$$

وبالتالي $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$ وحدهاالأول $v_0 = 5$ ($v_0 = u_0 - 25 = 30 - 25 = 5$)ب) لدينا $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = v_0 \cdot q^n$

$$v_n = 5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = 5 \times \frac{1}{5^n}$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{5^{n-1}}}$$

لدينا : $v_n = u_n - 25 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ومنه $u_n = v_n + 25$

$$\text{ولدينا } v_n = \frac{1}{5^{n-1}} = \frac{5}{5^n}$$

$$\text{ومنه } u_n = \frac{5}{5^n} + 25$$

$$\text{وبالتالي } \boxed{u_n = 25 + 5 \left(\frac{1}{5}\right)^n}$$

تتمة حل التمرين رقم 4 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{\ln x} = 0 \text{ ولدينا}$$

(C) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$.

$$\forall x \in D \quad f'(x) = 1 - \frac{(\ln'(x))}{(\ln x)^2} \text{ لدينا (4 - 1)}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{x(\ln x)^2} \text{ ومنه}$$

$$(\ln x)^2 > 0 : \forall x > 0 \text{ و } x \neq 1 \text{ لدينا (ب)}$$

ومنه الدالة f تزايدية قطعا على كل من المجالين

$$]0, 1[\text{ و }]1, +\infty[.$$

⑤ - لدينا :

$$\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right) = 0,4 \right) \quad f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = -1 < 0$$

$$\left(f(2) = 0,7 \right) \quad f(2) = 2 - \frac{1}{\ln 2} \approx 0,6 > 0$$

لدينا الدالة f متصلة على المجال $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ و الدالة f

تزايدية قطعا على المجال $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ و $f\left(\frac{3}{2}\right) \cdot f(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم الوسيطة يوجد عدد حقيقي وحيد

$$\alpha \text{ من المجال } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \text{ بحيث : } f(\alpha) = 0.$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

$$\text{ج) لدينا : } -1 < \frac{1}{5} < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 25 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0 \text{ إذن}$$

$$u_n \leq 25,0016 \quad \text{② - لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow 25 + \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq 25,0016$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \leq 0,0016$$

$$\Leftrightarrow (n-1) \ln\left(\frac{1}{5}\right) \leq \ln(0,0016) \text{ ومنه}$$

$$\Leftrightarrow (1-n) \ln 5 \leq \ln(0,0016)$$

$$\Leftrightarrow 1-n \leq \frac{\ln(0,0016)}{\ln 5} \text{ ومنه}$$

$$\text{ومنه } n \geq 1 - \frac{\ln(0,0016)}{\ln 5} = 5 \text{ يعني ابتداء من السنة}$$

$$2012 (2007+5).$$

حل التمرين الرابع:

$$\text{لدينا : } f(x) = x - \frac{1}{\ln x} \quad x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$$

$$\text{① - لدينا : } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{\ln x} = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \right) \text{ لأن}$$

$$\text{② - لدينا } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x - \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \right) \text{ لأن}$$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - \frac{1}{\ln x} = -\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x = 0^+ \right) \text{ لأن}$$

(C) يقبل مقاربا رأسيا معادلته $x = 1$.

$$\text{③ - لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \frac{1}{\ln x} = +\infty$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0 \right) \text{ لأن}$$

حل التمرين الخامس:

(10) كرات مرقمة من 1 إلى 10. نسحب بالتتابع وبإحلال ثلاث كرات من الكيس (كل سحبة هي ترتيبية بتكرار).

① - عدد السحبات الممكنة هو : $10^3 = 1000 = C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1$

② - ليكن p احتمال سحب ثلاث كرات تحمل كل منها رقما زوجيا (2-4-6-8-10)

$$p = \frac{C_5^1 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1}{C_{10}^1 \cdot C_{10}^1 \cdot C_{10}^1} = \frac{5 \times 5 \times 5}{10 \times 10 \times 10}$$

$$p = \frac{1}{8}$$

③ - ليكن p' احتمال سحب ثلاث كرات تحمل واحدة منها على الأقل رقما فرديا:

$$p' = 1 - p = 1 - \frac{1}{8}$$

$$p' = \frac{7}{8}$$

④ - ليكن الحدث :

A: الكرات تحمل أرقاما زوجية.

B: مجموع أرقام الكرات المسحوبة يساوي 24.

المطلوب هو : $p_A(B)$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

$A \cap B$: الكرات المسحوبة تحمل أرقاما زوجية مجموعها يساوي 24 (الأرقام هي 6 ، 8 و 10)

$$p(A \cap B) = \frac{6(1 \times 1 \times 1)}{10^3} = \frac{3}{500}$$

(6 هو معامل الترتيب $3! = 6$)

$$p_A(B) = \frac{\frac{3}{500}}{\frac{1}{8}} = \frac{24}{500} \text{ ومنه}$$

$$p_A(B) = \frac{6}{125}$$