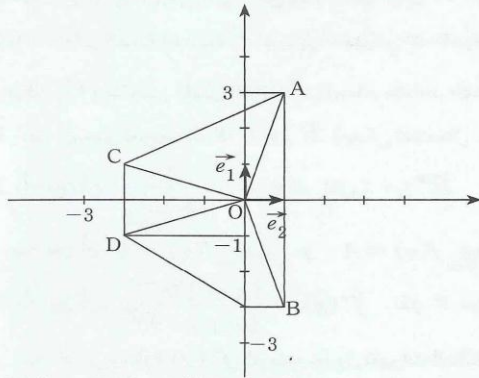


التمرين رقم 1 :

2- أ- تمثيل النقط A و B و C و D :
لدينا $A(1;3)$ و $B(1;-3)$ و $C(-3;1)$ و $D(-3;-1)$



ب- لنحسب معيار كل من الأعداد Z_1 و u و $Z_1 - u$:

$$\begin{aligned} |Z_1| &= |1 + 3i| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} \\ |u| &= |-3 + i| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10} \\ |Z_1 - u| &= |1 + 3i - (-3 + i)| \\ &= |1 + 3i + 3 - i| = |4 + 2i| \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

ج- استنتاج طبيعة كل من المثلثين AOC و BOD :

* طبيعة AOC :
لدينا $OA = |Z_A - Z_O| = |Z_1| = \sqrt{10}$
و $OC = |Z_C - Z_O| = |u| = \sqrt{10}$
إذن AOC متساوي الساقين في O .
ولدينا $AC = |Z_C - Z_A| = |u - Z_1| = |Z_1 - u| = \sqrt{20}$
إذن $OA^2 + OC^2 = AC^2$
وهذا يعني أن AOC قائم الزاوية في O .
نتيجة : AOC متساوي الساقين وقائم الزاوية في O .

* طبيعة BOD :

بنفس الطريقة نجد أن : $OB = |Z_B - Z_O| = |Z_2| = \sqrt{10}$
و $OD = |Z_D - Z_O| = |v| = \sqrt{10}$
و $BD = |Z_D - Z_B| = |v - Z_2| = \sqrt{20}$
إذن BOD متساوي الساقين وقائم الزاوية في O .

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 8 &= 0 \Leftrightarrow \\ x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 8 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 &= 6 \end{aligned}$$

إذن مركز الفلكة (S) هي النقطة $\Omega(1,2,3)$ وشعاعها $R = \sqrt{6}$

$$\begin{aligned} d(\Omega, (P)) &= \frac{|1 - 2 + 6 + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (2)^2}} \\ &= \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} = R \end{aligned}$$

إذن المستوى (P) مماس للفلكة (S)

3- أ- لدينا $\vec{n}(1, -1, 2)$ متجهة منتظمة على المستوى (P) و بالتالي تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- نضع $\omega(x, y, z)$

$$\omega \in (\Delta) \cap (P)$$

$$\omega \in (\Delta) \Leftrightarrow (\exists t \in \mathbb{R}) / \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \quad (1)$$

بتعويض x و y و z على التوالي بـ $1+t$ و $2-t$ و $3+2t$ في معادلة المستوى (P) .

يكون لدينا : $(1+t) - (2-t) + 2(3+2t) + 1 = 0$
وهذا يعني أن : $6t + 6 = 0$ إذن $t = -1$
وبالتعويض في النظمة (1) نجد : $x=0$ و $y=3$ و $z=1$
و بالتالي $(0,3,1)$ هو مثلث إحداثيات ω .

التمرين رقم 2 :

$$1- \text{لنحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } (E) : Z^2 - 2Z + 10 = 0$$

لدينا $\Delta = 4 - 40 = -36$ ومنه حلا المعادلة (E) هما :

$$Z = \frac{2 - i\sqrt{36}}{2} = 1 - 3i \text{ أو } Z = \frac{2 + i\sqrt{36}}{2} = 1 + 3i$$

وبما أن $m(Z_1) > 0$ فإن $Z_1 = 1 + 3i$ و $Z_2 = 1 - 3i$

حل المسألة

(I) 1- لدينا g قابلة للاشتقاق على R كمجموع دالتين قابلتين

للاشتقاق على R ولكل x من R لدينا :

$$g'(x) = -e^{-x} + 1$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

إذا كان $x \geq 0$ فإن $-x \leq 0$

ومنه $e^{-x} \leq 1$ وبالتالي $-e^{-x} + 1 \geq 0$

وهذا يعني أن g تزايدية على $[0, +\infty[$

وبالمثل نبين أنها تناقصية على $] -\infty, 0]$

2- نلخص تغيرات g في الجدول التالي :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$		$\nearrow 0$	

إذن من خلال جدول التغيرات نلاحظ أنه لكل x من R لدينا :

$$(g(x) \in [0, +\infty[) \quad g(x) \geq 0$$

ومنه نستنتج أن $e^{-x} + x \geq 1$ لكل x من R

(II) 1- لدينا $e^{-x} + x \geq 1$ حسب السؤال (I) -1

وهذا يعني أن $e^{-x} + x \neq 0$ ومنه حيز تعريف الدالة f هو R .

أ- لكن $x \in IR^*$ لدينا :

$$f(x) = \frac{x}{x + e^{-x}} = \frac{x}{x + \frac{1}{e^x}} = \frac{x}{x(1 + \frac{1}{xe^x})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 1 \quad \text{ب- لدينا :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \right) \quad \text{لأن}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = I$ مقارب أفقي للمنحنى (C) جوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{xe^x}} = 0 \quad \text{* لدينا :}$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0^- \right) \quad \text{لأن}$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مقارب أفقي للمنحنى (C) جوار $-\infty$

التمرين رقم 3 :

1- لدينا : لكل x من $IR - \{-1\}$

$$x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2 - 1}{x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{x^2}{x+1}$$

2- لدينا :

$$\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_0^2 (x-1) dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1} dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_0^2 + [\ln|x+1|]_0^2 = 2 - 2 + \ln 3 = \ln 3$$

3- نضع :

$$u(x) = \ln(x+1) \Leftrightarrow u'(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$v'(x) = x \Leftrightarrow v(x) = \frac{x^2}{2}$$

فنجد

$$\int_0^2 x \ln(x+1) dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln(x+1) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x+1} dx = 2 \ln 3 - \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx = 2 \ln 3 - \frac{1}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln 3$$

التمرين رقم 4 :

التجربة التالية : نسحب تانیا وعشوائيا ثلاث بيدات من الكيس .

الترتيب غير مهم ومنه رئيسي Ω هو :

$$C_7^3 = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

- احتمال الحدث A : لكي لا نحصل على بيدة تحمل العدد 0 يجب

أن نسحب ثلاثة بيدات من بين الأربعة بيدات التي تحمل 1 و 1 و 1

$$P(A) = \frac{C_3^4}{C_7^3} = \frac{4}{35} \quad \text{ومنه : 1 و 1}$$

- احتمال الحدث B : لكي نحصل على ثلاث بيدات تحمل أعدادا

مختلفة مثلي مثلي يجب أن نسحب بيدة تحمل الرقم 1 و بيدة

تحمل الرقم 1 و بيدة تحمل الرقم 0 ومنه :

$$P(B) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1 \cdot C_3^1}{C_7^3} = \frac{9}{35}$$

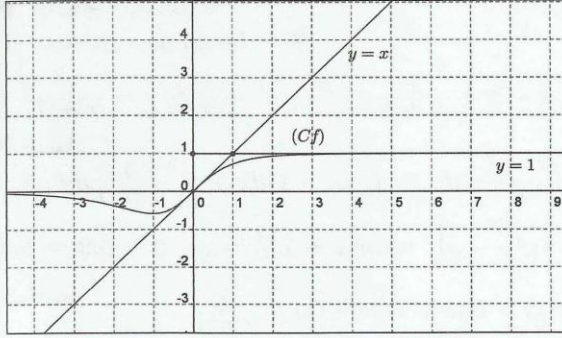
- احتمال الحدث C : لكي يكون مجموع الأعداد المسجلة على

البيدات الثلاثة المسحوبة منعدم يجب أن نسحب ثلاث بيدات

تحمل على التوالي 1 و 1 و 0 أو نسحب ثلاث بيدات تحمل أرقاما

منعدمة وبالتالي :

$$P(C) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1 \cdot C_3^1 + C_3^3}{C_7^3} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$$



(III) -1- لدينا $0 \leq u_0 \leq 1$
نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$ ولنبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

بما أن f تزايدية على $]1, +\infty[$

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$$

$$\text{أي: } 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{1+e^{-1}}$$

$$\text{وبما أن } \frac{1}{1+e^{-1}} < 1 \text{ فإن } 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

إذن $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$.

2- لدينا حسب نتيجة السؤال (II) (4 ب):

$$u_n - f(u_n) = \frac{u_n g(u_n)}{g(u_n) + 1}$$

$$\text{وبما أن } 0 \leq u_n \leq 1 \text{ و } g(u_n) \geq 0$$

$$\text{فإن } u_n - u_{n+1} \geq 0 \text{ أي أن } u_{n+1} \leq u_n$$

وهذا يعني أن المتتالية (u_n) تناقصية.

3- المتتالية (u_n) تناقصية و مصفورة بالعدد 0 فهي متقاربة، و

$$\text{بحل المعادلة } l = f(l)$$

$$\text{نستنتج أن: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

2- أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ كمجموع و خارج دوال قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

ولدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{(x + e^{-x}) - (1 - e^{-x})}{(x + e^{-x})^2} = \frac{(x + 1)e^{-x}}{(x + e^{-x})^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(x + 1)$

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$\ominus$	$\oplus$
$f(x)$	0	$\searrow \frac{-1}{-1+e}$	$\nearrow 1$

3- أ- معادلة المماس للمنحنى (C) في النقطة O أصل المعلم هي:

$$y = x \text{ أي } y = f'(0)x + f(0) = x$$

ب- لدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$x - f(x) = x - \frac{x}{x + e^{-x}}$$

$$= x - \frac{x(x + e^{-x}) - x}{x + e^{-x} - 1 + 1}$$

$$= \frac{x[x + e^{-x} - 1]}{g(x) + 1} = \frac{xg(x)}{g(x) + 1}$$

بما أن $g(x) \geq 0$ لكل x من $\mathbb{R}$ فإن إشارة $x - f(x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+; x - f(x) \geq 0 \text{ ومنه } \forall x \in \mathbb{R}^+; x - f(x) \geq 0$$

$$\text{و } \forall x \in \mathbb{R}^-; x - f(x) \leq 0$$

ج- من خلال السؤال السابق نستنتج أن (C) تحت (Δ) على المجال

$$]-\infty, 0[\text{ و }]0, +\infty[$$

و (C) يتقاطع مع (Δ) في أصل المعلم.

4- إنشاء المنحنى (C) والمستقيم (Δ) في المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$