

كاملة و بالتالي ليست جسما .

4-أ- نستعمل حسابا مباشرا (أنجزه) .

ب- لدينا : $\frac{1}{a^2 - 4b^2}(2aX - X^2) = I$

أي أن : $X\left(\frac{2}{a^2 - 4b^2}I - X\right) = I$

إذن X تقبل مقلوبا هو :

$$X^{-1} = \frac{2}{a^2 - 4b^2}I - X$$

ولدينا : $X^{-1} \in V$

لأن $X \in V$ و $I \in V$

(V فضاء متجهي) .

التمرين الثاني :

1-أ- $(iu - 1 - i)^2$

$$= (iu)^2 + 1 + (i)^2 - 2iu + 2i - 2i^2u$$

$$= -u^2 + 1 - 1 - 2iu + 2i + 2u$$

$$= -u^2 - 2iu + 2i + 2u$$

ب- المميز المختصر للمعادلة :

$$\Delta' = (u + 1 - i)^2 - (2u^2 - 4i)$$

$$= u^2 + 1 - 1 + 2u - 2i - 2iu - 2u^2 + 4i$$

$$= -u^2 + 2u - 2iu + 2i$$

$$= (iu - 1 - i)^2 \leftarrow \text{(حسب السؤال السابق)}$$

إذن حلا المعادلة هما : $z_1 = (u + 1 - i) + iu - 1 - i$

$$= (1 + i)u - 2i$$

$$z_2 = (u + 1 - i) - iu + 1 + i$$

$$= (1 - i)u + 2$$

2-أ- لدينا : $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

نعلم أن $z_A + z_B = \frac{b}{a} = 2(1 + u - i)$

لأن z_A و z_B هما حلي المعادلة .

إذن : $z_I = 1 + u - i$

Achamel.info

التمرين الأول :

1- لدينا : $M_{(0,0)} \in V$

و بالتالي : $V \neq \emptyset$

نلاحظ أن $M_{(a,b)} - \lambda M_{(c,d)} = M_{(a-\lambda c, b-\lambda d)} \in V$

$$(a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R})$$

إذن : V فضاء جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

• لدينا $M(a, b) = aI + bJ$

حيث : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

إذن (I, J) أسرة مولدة لـ V .

• نتبث أن (I, J) أسرة حرة لـ V لأن :

$$aI + bJ = 0_V \Rightarrow a = 0 \text{ و } b = 0$$

إذن (I, J) أساس للفضاء المتجهي V .

2-أ- لدينا $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(ac+4bd; ad+bc)}$

إذن V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); +)$

ب- لدينا :

• $(V, +)$ زمرة تبادلية جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}); +)$

• الضرب $\times$ تجميعي في $M_2(\mathbb{R})$ إذن فهو كذلك في V .

• $\times$ توزيعي بالنسبة لـ $+$ في $M_2(\mathbb{R})$ إذن فهو كذلك في V لأن

V جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}); +)$

• $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in V$ إذن حلقة واحدة

• $M_{(a,b)} \times M_{(c,d)} = M_{(c,d)} \times M_{(a,b)}$

أنظر صيغة الجداء في 2-أ

خلاصة : $(V, +, \cdot)$ حلقة واحدة تبادلية .

3-أ- لدينا : $M_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})} \times M_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})} = M_{(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2})} = M_{(0,0)}$

ب- نستنتج من السؤال السابق أن الحلقة $(V, +, \cdot)$ ليست

3- أ • لدينا $z_B - z_A = (1-i)u + 2 - (1+u)u + 2i$

$$z_B - z_A = -2iu + 2 + 2i$$

$$= -2i[a(1+i) - 2i] + 2 + 2i$$

$$z_B - z_A = 2(1-i)a - 2 + 2i$$

$$= (1-i)(2a-2)$$

$$u - z_A = u(1+i)u + 2i$$

$$= -iu + 2i$$

$$= -ia(1+i) - 2 - 2i$$

$$= a(1-i) - 2 + 2i$$

$$= (1-i)(a-2)$$

ب- إذا كان $a=2$ فإن $U=z_A$ وبالتالي فإن A و U و B نقط مستقيمة .

• إذا كان $a \neq 2$ فإن :

$$\frac{z_B - z_A}{u - z_A} = \frac{2a-2}{a-2}$$

أي أن : $\frac{z_B - z_A}{u - z_A} \in \mathbb{R}$ وبالتالي فإن النقط A و U و B مستقيمة .

التمرين الثالث :

1- قيم المتغير العشوائي X هي $\{0; 1; 2\}$

2- أ- يمكن اختيار أحد الصناديق باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$

لدينا إذن :

$$p(X=2) = \frac{1}{3} \times \frac{C_2^2}{C_n^2} + \frac{1}{3} \times \frac{C_3^2}{C_n^2}$$

إذا تم اختيار الصندوق U_2 إذا تم اختيار الصندوق U_3

إذن :

$$p(X=2) = \frac{2}{3n(n-1)} + \frac{2}{n(n-1)}$$

$$= \frac{8}{3n(n-1)}$$

ب- يمكن سحب كرة حمراء واحدة من كل من الصناديق الثلاثة

إذن :

$$p(X=1) = \frac{1}{3} \frac{C_1^1 \times C_{n-1}^1}{C_n^2} + \frac{1}{3} \frac{C_2^1 \times C_{n-2}^1}{C_n^2} + \frac{1}{3} \frac{C_3^1 \times C_{n-3}^1}{C_n^2}$$

• ليكن v لحق متجهة الإزاحة t .

لدينا : $z_I - z_u = v$

ومنه : $v = 1 - i$

إذن إحداثيات متجهة الإزاحة هي $(1; -1)$

ب- الكتابة العقديّة للدوران R هي : $z' - w = a(z - w)$

حيث $w = 2 - 2i$ و $a = e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

إذن : $z' - 2 + 2i = -iz + 2i + 2$

أي أن : $z' = -iz + 4$

لدينا بتعويض لحق A :

$$z' = -i((1+i)u - 2i) + 4$$

$$= (1-i)$$

$$u - 2 + 4 = (1-i)u + 2$$

$$= z_B$$

إذن صورة A بالدوران R هي B .

ج- لدينا حسب ما سبق $\Omega A = \Omega B$

أي أن المثلث $A\Omega B$ متساوي الساقين في Ω

وبما أن I منتصف $[AB]$

فإن (ΩI) واسط $[AB]$

وبالتالي : $(\Omega I) \perp (AB)$

د- لإنشاء النقطتين A و B نتبع الخطوات التالية :

①- ننشئ $\Omega(2; -2)$ ونقطة U ما تخالف النقطة ذات

الإحداثيات $(1, -1)$

$$\text{لأن } U \neq 1 - i$$

②- ننشئ I صورة U بالإزاحة t .

③- ننشئ المستقيم (ΩI) و (Δ) المستقيم العمودي عليه في I .

④- ننشئ قوس الدائرة التي مركزها I وشعاعها I تقاطعها مع

(Δ) هما A و B (أنجز الشكل)

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	0	0,3	$-\infty$

2- g متصلة على $]\ln 4; \ln 6[$

ولدينا : $g(\ln 4) = 2\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \ln 4 \simeq 0,1$

و $g(\ln 6) = 2\left(1 - \frac{1}{6}\right) - \ln 6 \simeq \frac{5}{3} - 1,8 < 0$

(لأن $\ln 4 = 2\ln 2 \simeq 1,4$ و $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3 \simeq 1,8$)

إذن حسب مبرهنة القيم الوسطية يوجد عدد α من $]\ln 4; \ln 6[$

بحيث : $g(\alpha) = 0$

α وحيد لأن قصور g على $]\ln 4; \ln 6[$ تقابل (g تناقصية

قطعا و متصلة) .

ب- لدينا : $\forall x \in [0, \alpha] g(x) \geq 0$

و $\forall x \in]\alpha, +\infty[g(x) < 0$

3- أ- لدينا : $1 \leq u_0 < \alpha$

لأن $\ln 4 \simeq 1,4$ و $\alpha > \ln 4$

نفترض أن : $1 \leq u_n < \alpha$

ولنبين أن : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$

الدالة $x \rightarrow 2(1 - e^{-x})$ تزايدية قطعا على $\mathbb{R}^+$ إذن :

$$1 \leq u_n < \alpha$$

$$\Rightarrow 2(1 - e^{-1}) \leq 2(1 - e^{-u_n}) < 2(1 - e^{-\alpha})$$

ونعلم أن : $g(\alpha) = 0$

أي أن : $2(1 - e^{-1}) \geq 1$ و $2(1 - e^{-\alpha}) = \alpha$

إذن : $1 \leq 2(1 - e^{-u_n}) < \alpha$

أي أن : $1 \leq u_{n+1} < \alpha$

ومنه : $(\forall n \in \mathbb{N}) 1 \leq u_n < \alpha$

$$= \frac{2}{3(n-1)n} \times [C_1^1 \times C_{n-1}^1 + C_2^1 \times C_{n-2}^1 + C_3^1 \times C_{n-3}^1]$$

$$= \frac{2}{3(n-1)n} [n-1 + 2(n-2) + 3(n-3)]$$

$$= \frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$$

نعلم أن :

$$P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 1$$

$$P(X=0) = \frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)} \quad \text{ومنه :}$$

k	0
$p(X=k)$	$\frac{3n^2 - 15n + 20}{3n(n-1)}$

1	2
$\frac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$	$\frac{8}{3n(n-1)}$

3- ليكن T_3 الحدث : «السحب تم من الصندوق U_3 »

المطلوب حساب الاحتمال الشرطي : $P_{(X=2)}(T_3)$

$$\text{ونعلم : } P_{(X=2)}(T_3) = \frac{p(T_3 \cap (X=2))}{p(X=2)}$$

$$P_{(X=2)}(T_3) = \frac{\frac{2}{3n(n-1)}}{\frac{8}{3n(n-1)}}$$

وبالتالي :

$$= \frac{2}{8}$$

$$= \frac{1}{4}$$

مسألة :

لدينا : $g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$

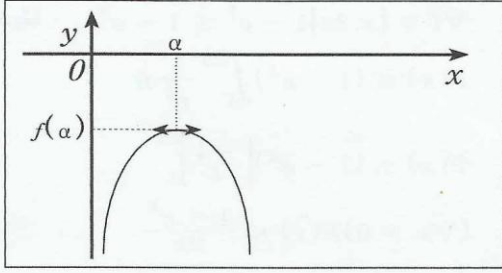
1- أ- لدينا : $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-x} - 1$

ومنه : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \quad \text{و} \quad g(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0 \quad \text{لأن :}$$

ب- نلخص تغيرات g في الجدول التالي :



III - 1 - أ

بوضع
$$\begin{cases} u'(t) = \frac{1}{t^2} \\ v'(t) = 1 - e^t \end{cases} \text{ نجد } \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{t} \\ v(t) = 1 - e^t \end{cases}$$

إذن :

$$\int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t}(1-e^t) \right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

أي أن :

$$(\forall x > 0) F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{(e^x-1)}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$$

$$\forall t \in [x, 2x] \quad e^x \leq e^t \leq e^{2x} \quad \text{ب- لدينا :}$$

$$\frac{e^x}{t} \leq \frac{e^t}{t} \leq \frac{e^{2x}}{t} \quad \text{ومنه :}$$

$$e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt \quad \text{إذن :}$$

$$e^x [\ln t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} [\ln t]_x^{2x} \quad \text{أي :}$$

$$e^x \ln(2) \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln(2) \quad \text{ومنه :}$$

$$[\ln t]_x^{2x} = \ln(2) \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} \ln(2) = \ln 2 \quad \text{ج- بما أن}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^x \ln(2) = \ln 2 \quad \text{و :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt = \ln 2 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = -\ln 2 \quad \text{و بحسب 1-أ- نجد :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x}-1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x-1}{x} = 1 \quad \text{لأن :}$$

إذن F متصلة على يمين الصفر .

ب- لدينا : $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = 2(1 - e^{-u_n}) - u_n$
 $= g(u_n)$

ج- حسب 2-ب- لكل n من $\mathbb{N}$ $g(u_n) > 0$

لأن $1 \leq u_n < \alpha$

ومنه (u_n) تزايدية قطعا .

د- بما أن (u_n) تزايدية ومكبورة ب α

فإنها متقاربة ونهايتها l هي حل للمعادلة : $g(x) = 0$

أي أن : $l = \alpha$

II -

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} - \frac{e^x}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{e^x - 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} - \frac{e^x}{x^3} = -\infty$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha = \frac{2}{2-\alpha} \Leftrightarrow g(\alpha) = 0 \quad \text{2-أ-}$$

$$1 - e^\alpha = \frac{-\alpha}{2-\alpha} \quad \text{ومنه :}$$

$$f(\alpha) = \frac{1-e^\alpha}{e^2} = \frac{1}{\alpha(\alpha-2)} \quad \text{وبالتالي نجد المطلوب :}$$

$$f'(x) = \frac{-e^x x^2 - 2x(1-e^x)}{x^4} \quad \text{ب-}$$

$$= \frac{-e^x \cdot x - 2(1-e^x)}{x^3}$$

$$= e^x \left[-x - 2e^{-x}(1-e^x) \right]$$

$$= \frac{e^x(2(1-e^{-x}) - x)}{x^3}$$

$$= \frac{e^x g(x)}{x^3}$$

إذن إشارة $g(x)$ هي $f'(x)$

x	0	α	+∞
f'(x)	+	0	-
f(x)	-∞	-4/3	-∞

ب- لدينا : $1 \leq e^{2c} \leq e^{2x}$ لأن $0 < c < x$

$$\frac{-e^{2x}}{2} \leq \frac{-1}{2} e^{2c} \leq \frac{-1}{2} \quad \text{ومنه :}$$

وبالتالي :

$$(\forall x > 0) \frac{-e^{2x}}{2} \leq \frac{F(x) - F(0)}{x} \leq \frac{-1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \frac{-1}{2} \quad \text{ج- نستنتج أن :}$$

ومنه F قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

$$F'_d(0) = \frac{-1}{2} \quad \text{ولدينا :}$$

2- أ- لدينا : $\forall t \in [x, 2x] 1 - e^t \leq 1 - e^x$

$$F(x) \leq (1 - e^x) \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt \quad \text{ومنه :}$$

$$F(x) \leq (1 - e^x) \left[\frac{-1}{t} \right]_x^{2x} \quad \text{إذن :}$$

$$(\forall x > 0) F(x) \leq \frac{1 - e^x}{2x} \quad \text{أي أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} - \frac{e^x}{2x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = -\infty \quad \text{فإن :}$$

حسب مصاديق التقارب .

3- لتكن G دالة أصلية للدالة المتصلة f :

$$IR_+^* \rightarrow \frac{1 - e^t}{t^2} \quad \text{على } t$$

لدينا : $(\forall x > 0) F(x) = G(2x) - G(x)$

إذن F قابلة للاشتقاق على IR_+^* ولدينا :

$$F'(x) = 2G'(2x) - G'(x)$$

$$F'(x) = 2f(2x) - f(x) \quad \text{إذن :}$$

$$= \frac{(1 - e^{2x}) - 2(1 - e^x)}{2x^2}$$

$$\forall x > 0 \quad F'(x) = -\frac{(e^x - 1)^2}{2x^2} \quad \text{أي :}$$

4- أ- شروط استعمال مبرهنة التزايد المتناهية محققة لـ F

في المجال $[0, x]$

إذن : $(\exists d \in]0, x[)$

$$F(x) - F(0) = xF'(d)$$

$$F(x) - F(0) = -\frac{x}{2} \left(\frac{e^d - 1}{d} \right)^2 \quad \text{أي :}$$

بتطبيق المبرهنة نفسها على الدالة $t \rightarrow e^t$ على $[0, d]$

$$[\exists c \in]0, d[] \quad \frac{e^d - 1}{d} = e^c \quad \text{نحصل على :}$$

$$\Rightarrow F(x) - F(0) = -\frac{x}{2} e^{2c} \quad [(e^c) = e^{2c}]$$

بما أن $0 < d < x$ و $0 < c < d$

فإن : $0 < c < x$