

تصحيح الإمتحان المقترح رقم 2

التمرين رقم 2 :

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} |\ln(x)| dx \quad \text{أحسب التكامل}$$

ندرس إشارة $\ln(x)$ لدينا :

x	0	$\frac{1}{e}$	1	e	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0	+	

$$I = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} |\ln(x)| dx + \int_1^e \frac{1}{x} |\ln(x)| dx \quad \text{إذن}$$

$$I = -\int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{\ln(x)}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx \quad \text{أي}$$

$$I = -\left[\frac{1}{2} \ln^2(x)\right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[\frac{1}{2} \ln^2(x)\right]_1^e \quad \text{ومنه فإن :}$$

$$I = 1 \quad \text{وبالتالي :}$$

2- أ- لنحدد a و b بحيث

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\} ; \frac{2t}{1+t} = a + \frac{b}{1+t}$$

$$a + \frac{b}{1+t} = \frac{at + (a+b)}{1+t} = \frac{2}{1+t} \quad \text{لدينا}$$

$$\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\} ; at + (a+b) = 2t \quad \text{إذن}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a + b = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه نجد}$$

$$(\forall t \in \mathbb{R} - \{-1\}) ; \frac{2t}{1+t} = 2 - \frac{2}{1+t} \quad \text{إذن}$$

$$J = \int_2^3 \frac{2t}{1+t} dt = \int_2^3 \left(2 - \frac{2}{1+t}\right) dt \quad \text{ب- لدينا}$$

$$= [2x - 2 \ln|1+x|]_2^3 = 2 + 2 \ln 3 - 4 \ln 2$$

التمرين رقم 3 :

0	1	(-2)
1	2	(-1)

الصندوق

ليكن Ω كون الإمكانات

بما أن السحب في آن واحد ، فإن

$$Card \Omega = C_6^3 = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

2- أ- حساب احتمال الحدث A :

يتحقق الحدث A بالحصول على كرة واحدة بالضبط تحمل الرقم

I أو على كرتين تحملان بالضبط الرقم I

$$Card A = C_2^1 \times C_4^2 + C_2^2 \times C_4^1 = 16 \quad \text{إذن :}$$

التمرين رقم 1 :

1- تحديد مركز وشعاع الفلكة (S)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0 \quad \text{طريقة (I) : لدينا}$$

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + y^2 + z^2 + 2z + 1 = 0 \leftrightarrow$$

$$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 1^2 \leftrightarrow$$

ومنه مركز (S) هو $\Omega(1, 0, -1)$ وشعاعها هو $R=1$

طريقة (2) لدينا

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$$

نعلم أن الشكل العام للمعادلة (S) هي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = -1 \\ d = 1 \end{cases} \quad \text{إذن} \quad \begin{cases} -2a = -2 \\ -2b = 0 \\ -2c = 2 \\ d = 1 \end{cases} \quad \text{وبالمماثلة نجد :}$$

ومنه مركز (S) هو $\Omega(1, 0, -1)$ وشعاعها هو :

$$R = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$d(\Omega, (P)) \longleftrightarrow (S) \quad \text{2- (P) مماس للفلكة (S)}$$

لدينا

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|1 - 2 \times 0 + 2(-1) - 2|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{3}{\sqrt{9}} = 1 = R$$

إذن (P) مماس للفلكة (S)

3- تحديد T نقطة تماس (P) و (S)

T هي المسقط العمودي للنقطة Ω على المستوى (P). إذن T هي

تقاطع (P) والمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P).

لدينا تمثيل بارامترى للمستقيم (Δ) هو :

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

لتحديد إحداثيات T نحل النظام :

$$\begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ x = \frac{4}{3} \\ y = -\frac{2}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \\ z = -1 + 2t \\ x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{إذن : } T\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

(1) تعني أن المثلث ABC متساوي الساقين في A و (2) تعني أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .
ج- لنبين أن $r(C) = B$
لدينا r الدوران الذي مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{2}$
ومنه إذا كانت M نقطة لحقها Z و M' لحقها Z' بحيث $r(M) = M'$
فإن $\begin{cases} AM' = AM \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$
بما أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A
و $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ فإن $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$
وهذا يعني أن: $r(C) = B$

حل المسألة :

الجزء الأول : $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$

1- لنبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2\sqrt{x} + 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x}\right) = +\infty \\ &\quad \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ لأن } \right) \end{aligned}$$

2- قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{x} - \frac{2\sqrt{x}}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - 2 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0

3- لدينا $f'(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ يعني أن

$$(\forall x > 0); f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$$

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x - 1$ إذن :

• إذا كان $x \in]0, 1]$ فإن $f'(x) \leq 0$

ومنه الدالة f تناقصية قطعاً على المجال $]0, 1]$

• إذا كان $x \in [1, +\infty[$ فإن $f'(x) \geq 0$

ومنه الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

ومنه فإن : $p(A) = \frac{\text{Card}A}{\text{Card}\Omega} = \frac{4}{5}$

ت- لنبين أن $p(S) = \frac{1}{5}$

يتحقق الحدث S عندما نحصل على $01(-1)$ أو $02(-2)$ أو $11(-2)$

ومنه $\text{Card}S = C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_2^1 + C_1^1 \cdot C_1^1 \cdot C_1^1 + C_2^2 \cdot C_1^1$

إذن $\text{Card}S = 4$ يعني أن $p(S) = \frac{\text{Card}S}{\text{Card}\Omega} = \frac{1}{5}$

3- نحن أمام اختبارات متكررة ومستقلة .

ليكن B الحدث : « الحصول على S ثلاث مرات بالضبط »

لدينا : $p(B) = C_3^3 \cdot (p(S))^3 \cdot (1 - p(S))^0$

$$p(B) = 4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5^4} = \frac{16}{625}$$

التمرين رقم 4 :

1- لنحل في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة :

$$z^2 + 6z + 10 = 0$$

لدينا $\Delta = 36 - 40 = -4$

ومنه $Z_1 = \frac{-6 + i\sqrt{4}}{2} = -3 + i$

و $Z_2 = \overline{Z_1} = -3 - i$

ومنه $S = \{-3 - i; -3 + i\}$

2- أ- لنكتب على الشكل المثلثي العدد العقدي $\frac{c-a}{b-a}$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{6i-1-2i}{-3+i-1-2i} = \frac{-1+4i}{-4-i}$$

$$= \frac{4i-1}{4+i} = \frac{(4i-1)(4-i)}{16+1}$$

$$= \frac{4-i-16i-4}{17} = -i$$

وبما أن $\frac{c-a}{b-a} = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$ فإن $-i = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$

ب- لنستنتج أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية :

بما أن $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$ فإن $\frac{c-a}{b-a} = \left[1, -\frac{\pi}{2}\right]$

و $\text{Arg}\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ أي $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ و $\begin{cases} AB = AC \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

ولدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{f(x)} = 0$ ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم لدينا

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{x}} + \frac{2}{x}\right) = 1$$

إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

ومنه (C) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $+\infty$

2- حساب $g'(x)$; $(\forall x > 0)$

$$g'(x) = [\ln(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

بما أن $f(x) > 0$; $\forall x > 0$

فإن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $f'(x)$ ومنه جدول تغيرات g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-\infty$	$-$	$+$
$g(x)$	$\ln(2)$	0	$+\infty$

3- إنشاء المنحنى (C) : بما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = -\infty$ فإن g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 ، ومبانيا (C) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل على يمين النقطة $(0, \ln 2)$

4- هي قصور الدالة g على المجال $[1, +\infty[$

أ- لدينا h دالة متصلة على المجال $[1, +\infty[$ كمركبة دالتين متصلتين هما : $x \mapsto \ln(x)$ و $x \mapsto f(x)$

ثم لدينا h تزايدية قطعاً على $[1, +\infty[$

إذن h تقبل دالة عكسية من المجال $[1, +\infty[$ نحو $J = h([1, +\infty[) = [0, +\infty[$

الجزء الثاني : $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = 2$

1- من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2$ ومنه $1 \leq u_0 \leq 2$ نفترض أن $1 \leq u_n \leq 2$ من أجل n معلوم .

بما أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

فإن $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

يعني أن $1 \leq u_{n+1} \leq 4 - 2\sqrt{2} < 2$

ومنه نستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 \leq u_n \leq 2$

2- لنبين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq u_n$

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = 2$ و $u_1 = f(u_0) = 4 - 2\sqrt{2}$

إذن $u_1 \leq u_0$

نفترض أن $u_k \leq u_{k-1}$ من أجل k معلوم .

بما أن الدالة f تزايدية قطعاً على المجال $[1, +\infty[$

و $f(u_k) \leq f(u_{k-1})$ إذن $u_k; u_{k-1} \in [1, 2]$

يعني أن $u_{k+1} \leq u_k$

ومنه نستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} \leq u_n$

يعني أن (u_n) تناقصية .

3- لدينا (u_n) تناقصية ومصفورة بالعدد 1 ، إذن (u_n) متقاربة

• حساب نهاية (u_n) :

لدينا $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = f(u_n)$

و $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n \in [1; 2]$

و $f([1; 2]) \subset [1; 2]$ و (u_n) متقاربة

إذن نهاية (u_n) هي l بحيث $f(l) = l$; $l \in [1; 2]$

$$l = 1 \iff \sqrt{l} = 1 \iff l - 2\sqrt{l} + 2 = l$$

$$\iff f(l) = l$$

إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

الجزء الثالث : $\forall x \in [0, +\infty[; g(x) = \ln(x - 2\sqrt{x} + 2)$

1- أ- لدينا $g(x) = \ln(f(x))$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(f(x)) = +\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$)

ب- تحديد الفرع اللانهائي للمنحنى (C) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{f(x)} \times \frac{f(x)}{x}$$

ب- نضع

$$y \in [1, +\infty[\text{ و } \forall x \in [0, +\infty[; y = h^{-1}(x)$$

$$\ln(f(y)) = x \longleftrightarrow h(y) = x$$

$$f(y) = e^x \longleftrightarrow$$

$$y - 2\sqrt{y} + 2 = e^x \longleftrightarrow$$

$$(\sqrt{y} - 1)^2 = e^x - 1 \longleftrightarrow$$

$$\sqrt{y} - 1 = \sqrt{e^x - 1} \longleftrightarrow$$

$$y = (1 + \sqrt{e^x - 1})^2 \longleftrightarrow$$

$$(\sqrt{y} - 1 \geq 0 \text{ إذن } y \in [1, +\infty[\text{ بما أن })$$

$$(\forall x \geq 0); h^{-1}(x) = (1 + \sqrt{e^x - 1})^2 \text{ ومنه}$$