

Achamel.info

تصحيح الدورة العادية 2013

حل التمرين الأول:

(1) لنتحقق من أن لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$(x-4)(x-2) = x^2 - 6x + 8$$

$$\text{لدينا } (x-4)(x-2) = x^2 - 2x - 4x + 8$$

$$= x^2 - 6x + 8$$

$$(2) \text{ استنتاج حلول المعادلة : } e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$$

$$\text{لدينا } e^{2x} = (e^x)^2$$

$$\text{ومنه } e^{2x} - 6e^x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (e^x)^2 - 6e^x + 8 = 0$$

$$\text{نضع } X = e^x \text{ و } X > 0$$

$$\text{إذن المعادلة } e^{2x} - 6e^x + 8 = 0 \text{ تصبح } X^2 - 6X + 8 = 0 \text{ وحسب السؤال (1) نجد :}$$

$$(X-4)(X-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow X-4=0 \quad \text{و} \quad X-2=0$$

$$\Leftrightarrow X=4 \quad \text{و} \quad X=2$$

$$\Leftrightarrow e^x = 4 \quad e^x = 2$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 4 \quad x = \ln 2$$

$$\text{ومنه } S = \{\ln 2; \ln 4\}$$

حل التمرين الثاني:

(1) حساب u_1 و u_2 :

$$u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 2$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 0 + 2 = 2$$

$$u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 2 = \frac{1}{4} \cdot 2 + 2$$

$$= \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

(2) أ- احسب V_0 :

$$\text{لدينا } V_n = u_n - \frac{8}{3}$$

$$\text{ومنه } V_0 = u_0 - \frac{8}{3} = -\frac{8}{3}$$

تتمة حل التمرين رقم 2:

ب- لنبين بالرجوع أن $(v_n)_n$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$

$$\text{لدينا } (\forall n \in \mathbb{N}); V_n = u_n - \frac{8}{3}$$

$$\text{ومنه } V_{n+1} = u_{n+1} - \frac{8}{3} = \left(\frac{1}{4}u_n + 2\right) - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{1}{4}u_n + \frac{6-8}{3} = \frac{1}{4}u_n - \frac{2}{3} = \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{8}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(u_n - \frac{8}{3}\right) = \frac{1}{4}V_n$$

ج- * حساب V_n بدلالة n : $(v_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ وحدها الأول

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = V_0 \cdot q^n \quad \text{إذن : } V_0 = -\frac{8}{3}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_n = -\frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

* استنتاج u_n بدلالة n :

$$\text{نعلم أن } (\forall n \in \mathbb{N}); V_n = u_n - \frac{8}{3}$$

$$\text{ومنه } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = V_n + \frac{8}{3}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = -\frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{8}{3}$$

$$\text{إذن } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

د- نهاية $(u_n)_n$

$$\text{لدينا : } (\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

$$\text{و بما أن لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ (لأن } -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{)}$$

$$\text{فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{8}{3}$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

$$\text{إذن } f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

ب- إشارة $f'(x)$ هي إشارة $x-1$ على $]0, +\infty[$ لأن $x^2 > 0$ ، ومنه :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

* جدول تغيرات f هو :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$		$+\infty$	$+\infty$

(4) * حساب : $f''(x)$

$$\text{لدينا } f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x-1)'x^2 - (x^2)'(x-1)}{x^4} \\ &= \frac{x^2 - 2x(x-1)}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} \\ &= \frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(-x+2)}{x^4} \\ &= \frac{-x+2}{x^3} \end{aligned}$$

* لدينا $x^3 > 0$ ($\forall x \in]0; +\infty[$)، ومنه إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-x+2$ ، لدينا :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-x+2$	+	-	-

* جدول تغيرات f هو :

x	0	2	$+\infty$
$f''(x)$		+	-

بما أن f'' تنعدم في 2 وتغير إشارتها على يمين وعلى يسار 2 فإن (C_f) يقبل نقطة انعطاف أفصولها 2:

$$I(2, f(2))$$

$$I\left(2, \frac{1}{2} + \ln(2)\right)$$

حل التمرين الثالث:

$$(1) * \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$* \text{ حساب النهاية : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \ln(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\ln(x)}{x} \right) = 0$$

$$(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ لأن } * \text{ التاويل الهندسي :})$$

$$\text{بما أن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

فإن (C_f) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه الأفاصيل بجوار $+\infty$

$$(2) * \text{ لنتحقق من أن } f(x) = \frac{1+x \ln(x)}{x}$$

$$\text{لدينا } f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

وبتوحيد المقامات نجد:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{x \ln(x)}{x} = \frac{1+x \ln(x)}{x}$$

$$* \text{ حساب النهاية : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1+x \ln(x)}{x} = +\infty$$

$$(\text{لأن : } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0)$$

* التاويل الهندسي :

$$(C_f) \text{ يقبل مقاربا عموديا معادلته } x=0$$

$$(3) \text{ أ- لنبين أن } f'(x) = \frac{x-1}{x^2} \text{ ($\forall x \in]0; +\infty[$)}$$

$$\text{نعلم أن } (\ln(x))' = \frac{1}{x} \text{ و } \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

تتمة حل التمرين رقم 4 :

$$p(A) = \frac{Card A}{Card \Omega} = \frac{1}{210} \text{ إذن}$$

$$B = \{\overline{BBBB}\} \text{ ب- لدينا}$$

$$Card B = C_3^1 \cdot C_7^3 = 12 \text{ ومنه}$$

$$= 3 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 105$$

$$p(B) = \frac{Card B}{Card \Omega} = \frac{105}{210} = \frac{1}{2} \text{ إذن}$$

$$C = \{RRR\overline{R}; BBB\overline{B}; VVV\overline{V}\} \text{ ج- لدينا}$$

$$Card C = C_4^3 \cdot C_6^1 + C_3^3 \cdot C_7^1 + C_3^3 \cdot C_7^1 \text{ ومنه}$$

$$Card C = 24 + 7 + 7 = 38$$

$$p(C) = \frac{Card C}{Card \Omega} = \frac{38}{210} = \frac{19}{105} \text{ ومنه}$$

2. لدينا احتمال شرطي:

$$p_C(B) = \frac{p(B \cap C)}{p(C)}$$

$$B \cap C = \{BRRR; BVVV\} \text{ لدينا}$$

$$Card(B \cap C) = C_3^1 \cdot C_4^3 + C_3^1 \cdot C_3^3$$

$$= 12 + 3 = 15$$

$$p(B \cap C) = \frac{15}{210} \text{ ومنه}$$

$$p_C(B) = \frac{\frac{15}{210}}{\frac{38}{210}} = \frac{25}{38} \text{ إذن}$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

$$(5) \text{ أ- لنحسب التكامل : } J = \int_1^3 \ln(x) dx$$

$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = x \end{cases} \text{ نضع : } \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ V'(x) = 1 \end{cases}$$

$$J = [x \ln(x)]_1^3 - \int_1^3 \frac{1}{x} \cdot x dx = [x \ln(x)]_1^3 - \int_1^3 1 dx$$

$$= [x \ln(x)]_1^3 - [x]_1^3 = [x \ln(x) - x]_1^3$$

$$= (3 \ln(3) - 3) - (1 \ln(1) - 1)$$

$$= 3 \ln(3) - 3 + 1$$

$$J = 3 \ln(3) - 2$$

ب - مساحة الحيز المخدش هي مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الأفاصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x=1$ و $x=3$ ، إذن المساحة المطلوبة

$$S = \int_1^3 |f(x)| dx \text{ (u.a) هي}$$

$$\forall x \in [1; 3]; f(x) > 0 \text{ وبما أن}$$

$$S = \int_1^3 f(x) dx \text{ (u.a) فإن}$$

$$S = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) dx \text{ (u.a)}$$

$$S = ([\ln x]_1^3 + J) u.a$$

$$S = (4 \ln(3) - 2) \text{ cm}^2$$

حل التمرين الرابع:

RR	VV	BB
RR	V	B

الصندوق

ليكن Ω كون الامكانيات لدينا :

$$card \Omega = C_{10}^4$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

$$(1) \text{ أ- لدينا } A = \{RRRR\}$$

$$Card A = C_4^4 = 1 \text{ ومنه}$$