

تصحيح الإمتحان المقترح رقم 1

2 - X متغير عشوائي مرتبط بمجموع العددين المسجلين على الكرتين

المسحوبتين . (لا نهتم باللون)

لدينا $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ إذن ومنه

$00 \rightarrow X = 0$	
$01 \rightarrow X = 1$	
$02 \rightarrow X = 2$	
$11 \rightarrow X = 2$	
$12 \rightarrow X = 3$	

تحديد قانون احتمال X :

$$p(X = 0) = \frac{C_4^2}{28} = \frac{3}{14}$$

$$p(X = 1) = \frac{C_4^1 \cdot C_3^1}{28} = \frac{3}{7}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_4^1 \cdot C_1^1 + C_3^2}{28} = \frac{1}{4}$$

$$p(X = 3) = \frac{C_3^1 \cdot C_1^1}{28} = \frac{3}{28}$$

ملحوظة : نتحقق من أن

$$p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

التمرين رقم 3 :

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C المعادلة :

$$(E): z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = 0$$

1- نتحقق من أن 2 حل للمعادلة (E) :

$$\begin{aligned} 2^3 - 4(2)^2 + 6(2) - 4 &= 8 - 16 + 12 - 4 \\ &= 20 - 20 = 0 \end{aligned}$$

إذن 2 حل للمعادلة (E) .

2- لنحدد الأعداد الحقيقية a و b و c التي تحقق :

$$z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$$

لدينا :

$$\begin{aligned} (z - 2)(az^2 + bz + c) &= az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c \\ &= az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c \end{aligned}$$

و بالمماثلة نجد النظمة التالية :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2a - 4 = -2 \\ 2 - 2(-2) = 6 \\ c = 2 \end{cases} \quad \text{ومن هنا نجد} \quad \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -4 \\ c - 2b = 6 \\ -2c = -4 \end{cases}$$

التمرين رقم 1 :

1- لدينا

x	0	1	2
$ x - 1 $	1	0	1

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 (1 - x)dx + \int_1^2 (x - 1)dx \quad \text{إذن} \\ &= \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2 = 1 \end{aligned}$$

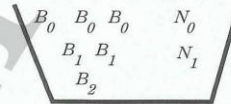
$$\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{نجد} \quad \begin{cases} u(x) = \ln(x) \\ v'(x) = 1 \end{cases} \quad \text{نضع 2}$$

$$I = [x \ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x} dx \quad \text{ومن هنا}$$

يعني أن

$$I = [x \ln(x)]_1^2 - [x]_1^2 = [x \ln(x) - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1$$

التمرين رقم 2 :



ليكن Ω كون الإمكانات

بما أن السحب في آن واحد، فإن كل سحبة هي تأليف لعنصرين من

$$\text{Card} \Omega = C_8^2 = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \quad \text{ومن هنا 8 عناصر،}$$

1- أ- احتمال الحدث A «للكرتين المسحوبتين نفس اللون»

يتحقق الحدث A بالحصول على كرتين بيضاوين أو كرتين سوداوين

(لا نهتم بالأرقام)

$$p(A) = \frac{\text{Card} A}{\text{Card} \Omega} = \frac{C_6^2 + C_2^2}{28} = \frac{4}{7} \quad \text{إذن :}$$

ب- احتمال الحدث B «جاء العددين المسجلين على الكرتين

المسحوبتين منعدم»

يتحقق الحدث B بالحصول على كرة تحمل رقم 0 على الأقل (لا

نهتم باللون) .

$$\text{Card} B = C_4^1 \cdot C_4^1 + C_4^2 = 22 \quad \text{ومن هنا}$$

$$p(B) = \frac{\text{Card} B}{\text{Card} \Omega} = \frac{11}{14} \quad \text{إذن}$$

$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} / \exists t \in \mathbb{R} \leftrightarrow M(x, y, z) \in (D)$

$(D): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

ومنه نجد

ملحوظة: إذا كانت $ax + by + cz + d = 0$ هي معادلة للمستوى (P) فإن $\vec{u}(a, b, c)$ منظمية عليه

2- بما أن B هي نقطة تقاطع (D) و (P) فإن إحداثيات B هي

حل للنظمة:

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = 2 - t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

نعوض x, y, z في معادلة (P) نجد

$$(2 + t) + t - (2 - t) - 3 = 0 \quad \text{ومنه } t = 1$$

إذن $x = 3, y = 1, z = 1$ يعني $B(3, 1, 1)$

تذكير: إذا كان R هوشعاف فلكة (S) ، r هوشعاف دائرة (C) و d هي المسافة بين Ω مركز (S) والمستوى (P) ، فإن $R^2 = r^2 + d^2$

أ- لدينا $r = 2$ و $d = AB$ (لأن B هي المسقط العمودي للنقطة A على (P)) إذن $R = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

ب- $AM^2 = R^2 \leftrightarrow M(x, y, z) \in (S)$

$$(x - 2)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 13$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z - 5 = 0$$

ومنه فإن: $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z - 5 = 0$

حل المسألة:

1- أ- دراسة اتصال الدالة f في النقطة 0 :

لدينا $f(0) = 4 \times 0 \sqrt{0} - 3 \times 0^2 = 0$ (لأن $x \geq 0$)

إذن f متصلة على اليمين في 0 .

ثم لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1 - x^3) = \ln(1) = 0 = f(0)$

إذن f متصلة على اليسار في 0 .

نتيجة: f متصلة في 0

ب- قابلية اشتقاق f على اليمين واليسار في 0 :

(نذكر بأن $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + t)}{t} = 1$)

إذن $a = 1$ و $b = -2$ و $c = 2$

ومنه $z^3 - 4z^2 + 6z - 4 = (z - 2)(z^2 - 2z + 2)$

3- * لنحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة (E) :

المعادلة (E) تكافئ $(z - 2)(z^2 - 2z + 2) = 0$

تكافئ $z - 2 = 0$ و $z^2 - 2z + 2 = 0$

لدينا $\Delta = -4$ أو $z = 2$

ومنه $z = 1 - i$ أو $z = 1 + i$ أو $z = 2$

إذن $S = \{1, -i, 2, 1 + i\}$

* الشكل المثلثي:

$2 = [2; 0], 1 + i = [\sqrt{2}; \frac{\pi}{4}], 1 - i = [\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4}]$

4- أ- لنبين أن المثلث ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية

لدينا $\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} = \frac{1 + i - 2}{1 - i - 2} = \frac{-1 + i}{-1 - i} = \frac{1 - i}{1 + i}$

$$= \frac{(1 - i)^2}{2} = -i = [1; -\frac{\pi}{2}]$$

إذن $\left| \frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right| = 1 \Leftrightarrow AB = AC$ (1)

$\text{Arg}\left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = -\frac{\pi}{2} [\pi/2]$ (2)

(1) تعني أن المثلث ABC متساوي الساقين في A .

(2) تعني أن المثلث ABC قائم الزاوية في A .

ب- شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC .

بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في A فإن مركز الدائرة المحيطة به هو I منتصف القطعة $[BC]$

إذن لحق I هو: $Z_I = \frac{Z_B + Z_C}{2} = 1$

وشعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC هو:

$$r = \frac{BC}{2} = \frac{|Z_C - Z_B|}{2} = \frac{|-2i|}{2} = 1$$

التمرين رقم 4:

1- لدينا $(P) \perp (D)$

إذن (D) موجه بالمتجهة المنظمية على المستوى (P)

وبما أن $\vec{u}(1, 1, -1)$ هي المتجهة المنظمية على (P)

فإن $\vec{u}$ موجه لـ (D)

لنحدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

ب- لكل x من $\mathbb{R}^*$ لدينا :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\ln(1-x^3)}{x} = \frac{\ln\left[-x^3\left(1-\frac{1}{x^3}\right)\right]}{x}$$

$$= \frac{\ln(-x^3)}{x} + \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}{x}$$

$$= \frac{3\ln(-x)}{x} + \frac{\ln(1-x^3)}{x}$$

(لأن $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ و $-x^3 = (-x)^3$)

ج- دراسة الفروع اللانهائية :

• لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لنحسب :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln(1-x^{-3})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 \cdot \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1-\frac{1}{x^3}\right) = 0$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(-x)}{x} = 0$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$)

إذن (C) تقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بجوار $-\infty$

• لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ لنحسب :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2\left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 3\right)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 3\right) = -\infty$$

إذن (C) يقبل شلجيمياً في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

4- إنشاء (C)

لدينا جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	$+\infty$	0	1	$-\infty$

لنحدد تقاطع (C) مع محور الأفاصيل

$$x\sqrt{x}(4-3\sqrt{x}) = 0 \Leftrightarrow 4x\sqrt{x} - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

$$\sqrt{x} = \frac{4}{3} \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{16}{9} \text{ أو } x = 0 \Leftrightarrow$$

إذن $(C) \cap (ox) = \left\{(0,0), \left(\frac{16}{9}, 0\right)\right\}$

* $x > 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x\sqrt{x} - 3x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} (4\sqrt{x} - 3x) = 0$$

إذن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و $f'_d(0) = 0$

* $x < 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x^3)}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} -x^2 \times \frac{\ln(1-x^3)}{-x^3}$$

نضع $t = -x^3$ ومنه $t \rightarrow 0^+$ و $(x \rightarrow 0^-) \Leftrightarrow (t \rightarrow 0^+)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x^2) \times \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+t)}{t} = 0$$

ومنه f قابلة للاشتقاق على اليسار في 0 و $f'_g(0) = 0$

نتيجة : f قابلة للاشتقاق في 0 و $f'(0) = 0$

مبياننا : (C) يقبل مماساً أفقياً معادلته : $y=0$ في النقطة O .

2- لنحسب $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(1-x^3)'}{1-x^3} = \frac{-3x^2}{1-x^3} ; x < 0$$

$$f'(x) = 4\sqrt{x} + \frac{2x}{\sqrt{x}} - 6x = 6\sqrt{x}(1-\sqrt{x}) ; x < 0$$

لدينا لكل x من $\mathbb{R}^*$ ، $1-x^3 > 0$ و $-3x^2 < 0$

ومنه $f'(x) < 0$

ثم ، $6\sqrt{x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $1-\sqrt{x}$

إذا كان $x \in]0, 1[$ فإن $1-\sqrt{x} > 0$ يعني $f'(x) > 0$

إذا كان $x \in [1, +\infty[$ فإن $1-\sqrt{x} \leq 0$ يعني $f'(x) \leq 0$

وبالتالي : f تناقصية على المجالين $]0, 1[$ و $[1, +\infty[$

وتزايدية على المجال $[0, 1]$

3- أحسب النهايات :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1-x^3) = +\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x^3) = +\infty$)

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x\sqrt{x} - 3x^2)$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 3\right) = -\infty$$

(لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - 3\right) = -3$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$)

ومنه نستنتج أن $\forall n \in \mathbb{N} ; \frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$

ب- لنبين بالترجع أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n$

تذكير :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n \longleftrightarrow (u_n)_n$ تزايدية

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{4}{9}$ و $u_1 = f(u_0) = \frac{16}{9}$

ومن $u_1 \geq u_0$ نفترض أن $u_k \geq u_{k-1}$ من أجل k معلوم

بما أن f تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ و $u_k \in [\frac{4}{9}, 1]$ ($\forall k \in \mathbb{N}$) ;

فإن $u_{k+1} \geq u_k$ يعني $f(u_k) \geq f(u_{k-1})$

ومنه نستنتج أن $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \geq u_n$

وهذا يعني أن $(u_n)_n$ تزايدية .

ج- بما أن $(u_n)_n$ تزايدية ومكبورة بالعدد 1 فإن $(u_n)_n$ متقاربة .

• تحديد نهاية $(u_n)_n$ لدينا :

$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} = f(u_n)$

$u_n \in [\frac{4}{9}, 1]$ و $f([\frac{4}{9}, 1]) \subset [\frac{4}{9}, 1]$

إذن نهاية $(u_n)_n$ هي نهاية l بحيث l أحد حلول المعادلة

$x \in [\frac{4}{9}, 1] ; f(x) = x$

$4x\sqrt{x} - 3x^2 - x = 0 \longleftrightarrow f(x) = x$

$x(-3x + 4\sqrt{x} - 1) = 0 \longleftrightarrow$

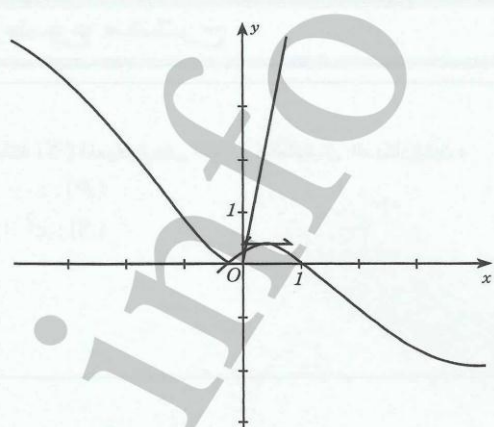
$-3(\sqrt{x})^2 + 4\sqrt{x} - 1 = 0$ أو $x = 0 \longleftrightarrow$

$\sqrt{x} = 1$ أو $\sqrt{x} = \frac{1}{3}$ أو $x = 0 \longleftrightarrow$

$x = 1$ أو $x = \frac{1}{9}$ أو $x = 0 \longleftrightarrow$

بما أن $1 \in [\frac{4}{9}, 1]$ و $\frac{1}{9} \in [\frac{4}{9}, 1]$ و $0 \in [\frac{4}{9}, 1]$

فإن $l = 1$ إذن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$



5- أ- بما أن h قصور الدالة f على المجال $] -\infty, 0[$

فإن h متصلة على $] -\infty, 0[$ لأنها مركبة من دالتين متصلتين

هما : $x \mapsto 1 - x^3$ و $x \mapsto \ln(x)$

ولدينا h تناقصية قطعاً على $] -\infty, 0[$ ، إذن فهي تقبل دالة

عكسية من المجال $]0, +\infty[$ $J =]\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) ; \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[=]0, +\infty[$

نحو المجال $] -\infty, 0[$

ب- تحديد : $\forall x \in J ; h^{-1}(x)$

نضع $1 - y^3 = e^x \longleftrightarrow h(y) = x \longleftrightarrow y = h^{-1}(x)$

$y = -\sqrt[3]{e^x - 1} \longleftrightarrow -y^3 = e^x - 1 \longleftrightarrow$

$(-y)^3 = e^x - 1 \longleftrightarrow -y^3 = e^x - 1 \longleftrightarrow$

إذن : $\forall x \in J ; h^{-1}(x) = -\sqrt[3]{e^x - 1}$

x	0	$+\infty$
$e^x - 1$	0	$+$

6- لدينا $\forall n \in \mathbb{N} ; u_{n+1} = f(u_n)$ و $u_0 = \frac{4}{9}$

أ- لنبين بالترجع أن $\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$ لكل x من $\mathbb{N}$.

من أجل $n=0$ لدينا $u_0 = \frac{4}{9}$ ومنه $\frac{4}{9} \leq u_0 \leq 1$

نفترض أن $\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$ من أجل n معلوم

بما أن f تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ و $u_n \in [\frac{4}{9}, 1]$

نجد $f(\frac{4}{9}) \leq f(u_n) \leq f(1)$

يعني أن $\frac{4}{9} < \frac{16}{27} \leq u_{n+1} \leq 1$