

Achamel.info

تصحيح الدورة الإستدراكية 2012

تتمة حل التمرين رقم 2 :

نفترض أن $u_n < 1$ ونبين أن $u_{n+1} < 1$.

$$\text{لدينا: } u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2 - u_n} - 1 = \frac{1 - (2 - u_n)}{2 - u_n}$$

$$= \frac{1 - 2 + u_n}{2 - u_n} = \frac{u_n - 1}{2 - u_n}$$

بما أن $u_n < 1$ (افترض التراجع) فإن $u_n - 1 < 0$ و

$$-u_n > -1 \text{ ومنه } 2 - u_n > 1 > 0$$

$$\text{إذن } u_{n+1} - 1 < 0 \text{ أي } u_{n+1} < 1$$

وبالتالي $u_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).

$$(2) \text{ (أ) لنبين أن } u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n} \text{ (} \forall n \in \mathbb{N} \text{) ;}$$

لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2 - u_n} - u_n$$

$$= \frac{1 - u_n(2 - u_n)}{2 - u_n}$$

$$= \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{2 - u_n}$$

$$= \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$$

ومنه المطلوب.

ب - استنتاج أن $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية وأنها متقاربة.

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}$$

وبما أن $(\forall n \in \mathbb{N}); (u_n - 1)^2 > 0$

$$\text{و } 2 - u_n > 0 \text{ لأن } u_n < 1$$

$$\text{فإن } (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n > 0$$

ومنه $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية تزايدية.

* بما أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية ومكبورة بالعدد 1

فإن $(u_n)_{n \geq 0}$ متتالية متقاربة.

حل التمرين الأول:

(1) لنتحقق من أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

F دالة قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ كمجموع وجداء دوال قابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$.

لكل x من $]0; +\infty[$ لدينا: $F'(x) = (x \ln x - x)'$

$$= \ln(x) + 1 - 1$$

$$= \ln(x) = f(x)$$

ومنه المطلوب.

$$(2) \text{ حساب التكامل: } I = \int_1^e \ln x dx$$

$$I = \int_1^e \ln x dx = \int_1^e f(x) dx$$

$$= [F(x)]_1^e$$

$$= F(e) - F(1) = 1$$

$$(3) \text{ حساب التكامل: } J = \int_1^e (\ln x)^2 dx \text{ باستعمال مكاملة}$$

بالأجزاء

$$\text{نضع } \begin{cases} u'(x) = \frac{2 \ln x}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \text{ ونجد } \begin{cases} u(x) = (\ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

$$J = \int_1^e (\ln x)^2 dx \text{ ومنه:}$$

$$= [x(\ln x)^2]_1^e - \int_1^e 2 \ln x dx$$

$$= [x(\ln x)^2]_1^e - 2I$$

$$= e - 0 - 2$$

$$\text{إذن: } J = e - 2$$

حل التمرين الثاني:

(1) لنبين بالتراجع أن لكل n من $\mathbb{N}$: $u_n < 1$.

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 0$ و $0 < 1$ إذن $u_0 < 1$.

تممة حل التمرين رقم 2 :

استنتاج u_n بدلالة n .

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2 + n \quad \text{ولدينا}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{2 + n - 2}{2 + n - 1}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}); u_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{وبالتالي:}$$

د - استنتاج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{لأن}$$

حل التمرين الثالث:

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي $f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 1$ و (C) التمثيل المبياني لـ f في معلم متعامد ممنظم $(O; i; j)$.

(1) أحسب النهاية $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وأعط تأويلا هندسيا للنتيجة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^{2x} - 4e^x + 1 = 1$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = 0 \right) \text{ لأن}$$

التأويل الهندسي :

(C) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$.

(2) أتحقق أن: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = e^x \left(3e^x - 4 + \frac{1}{e^x} \right)$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = 3e^{2x} - 4e^x + 1$$

$$= 3e^x e^x - 4e^x + \frac{1}{e^x} e^x$$

$$= e^x \left(3e^x - 4 + \frac{1}{e^x} \right)$$

أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

تممة حل التمرين رقم 2 :

(3) نضع $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أحسب $v_{n+1} - v_n$ ثم استنتج أن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 1$.

$$(\forall n \in \mathbb{N}); v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} - \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{1}{2 - u_n} - 2 - \frac{u_n - 2}{2 - u_n - 1}$$

$$= \frac{1 - 4 + 2u_n}{2 - u_n} - \frac{u_n - 2}{2 - u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n - 3}{u_n - 1} - \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n - 3 - u_n + 2}{u_n - 1} = \frac{u_n - 1}{u_n - 1} = 1$$

إذن $(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية

أساسها $r = 1$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$

ب- أبين أن $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

$$\text{لدينا: } (\forall n \in \mathbb{N}); v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$$

$$\text{ومنه } v_n(u_n - 1) = u_n - 2 \quad \text{أي } v_n u_n - v_n = u_n - 2$$

$$\text{ومنه } v_n u_n - u_n = v_n - 2 \quad \text{إذن } U(v_n - 1) = v_n - 2$$

$$\text{وبالتالي } u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$$

ج - حساب v_n بدلالة n .

$(v_n)_{n \geq 0}$ متتالية حسابية أساسها $r = 1$ وحدها الأول

$$(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = v_0 + nr \quad \text{إذن } v_0 = 2$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N}); v_n = 2 + n} \quad \text{ومنه}$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

إذن f تزايدية على المجال $\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right); +\infty\right[$
و f تناقصية على المجال $] -\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right]$

*أتحقق أن $f\left(\ln\frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} f\left(\ln\frac{2}{3}\right) &= 3e^{2\ln\left(\frac{2}{3}\right)} - 4e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} + 1 \\ &= 3 \cdot e^{\ln\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)} - 4 \cdot \frac{2}{3} + 1 = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{8}{3} + 1 \\ &= \frac{12}{9} - \frac{8}{3} + 1 \\ &= \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{3}{3} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

*جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$\ln \frac{2}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	1	$-\frac{1}{3}$	$+\infty$

(4) أ - تحقق أن $(\forall x \in \mathbb{R}); (3e^x - 1)(e^x - 1) = f(x)$

$$\begin{aligned} (3e^x - 1)(e^x - 1) &= 3e^{2x} - 3e^x - e^x + 1 \\ &= 3e^{2x} - 4e^x + 1 = f(x) \end{aligned}$$

ب - استنتج أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاسيل

في النقطة O وفي النقطة $I(-\ln 3; 0)$.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (3e^x - 1)(e^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3e^x - 1) = 0 \text{ أو } (e^x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow e^x = \frac{1}{3} \text{ أو } e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \ln\frac{1}{3} \text{ أو } x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln 3 \text{ أو } x = 0$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(3e^x - 4 + \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$$

لأن $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \left(3e^x - 4 + \frac{1}{e^x} \right) = +\infty$$

لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

التأويل الهندسي :

(C) يقبل فرعاً شلجياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار $+\infty$.

(3) أ - أبين أن $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2e^x(3e^x - 2)$

لدينا $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = (3e^{2x} - 4e^x + 1)'$

$$= 3 \times 2e^{2x} - 4e^x$$

$$= 6e^{2x} - 4e^x$$

$$= 2e^x(3e^x - 2)$$

ومنه المطلوب.

ب - ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 2e^x(3e^x - 2)$$

$$\text{و } (\forall x \in \mathbb{R}); 2e^x > 0$$

إذن إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ هي إشارة $(3e^x - 2)$

$$3e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{2}{3} \Leftrightarrow \ln(e^x) \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$3e^x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \ln\left(\frac{2}{3}\right) \text{ و}$$

$$\forall x \in \left[\ln\left(\frac{2}{3}\right); +\infty \right[; f'(x) \geq 0 \text{ ومنه}$$

$$\text{و } \forall x \in \left] -\infty; \ln\left(\frac{2}{3}\right) \right]; f'(x) \leq 0$$

تتمة حل التمرين رقم 3 :

ومنه المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في النقطة $O(0;0)$ وفي النقطة $I(-\ln 3;0)$.

ج- أبين أن $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = 4e^x(3e^x - 1)$

لدينا $f'(x) = 2e^x(3e^x - 2) = 6e^{2x} - 4e^x$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (6e^{2x} - 4e^x)' \\ &= 6 \times 2e^{2x} - 4e^x = 12e^{2x} - 4e^x \\ &= 4e^x(3e^x - 1) \end{aligned}$$

* ادرس إشارة $f''(x)$ ثم استنتج أن I هي نقطة انعطاف المنحنى (C)

$$(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = 4e^x(3e^x - 1)$$

ولدينا $4e^x > 0$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $(3e^x - 1)$ على $\mathbb{R}$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq -\ln(3)$$

ومنه $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; -\ln 3]$ و $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [-\ln 3; +\infty[$

x	$-\infty$	$-\ln 3$	$+\infty$
$f''(x)$	-	ϕ	+

f'' تنعدم في $(-\ln 3)$ وتغير إشارتها على يمين وعلى يسار $(-\ln 3)$ إذن النقطة $I(-\ln 3;0)$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C)

د- أحسب $f'(-\ln 3)$ و $f'(0)$

$$f'(x) = 6e^{2x} - 4e^x$$

$$f'(0) = 6 - 4 = 2$$

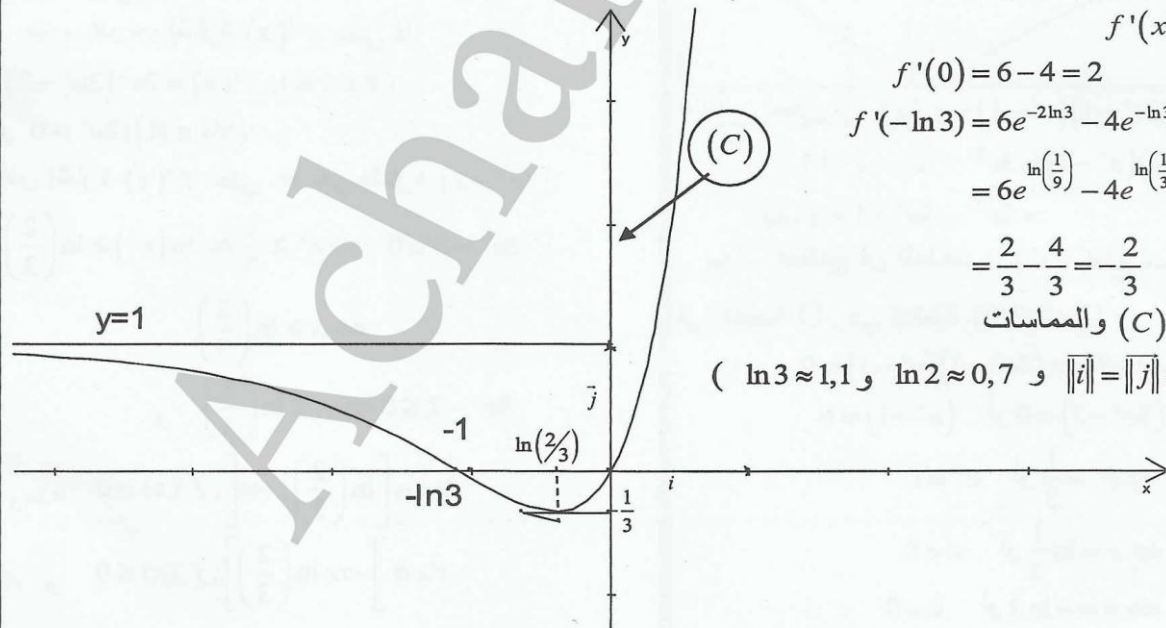
$$f'(-\ln 3) = 6e^{-2\ln 3} - 4e^{-\ln 3}$$

$$= 6e^{\ln(\frac{1}{9})} - 4e^{\ln(\frac{1}{3})} = 6 \cdot \frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$$

إنشاء المنحنى (C) والمماسات

(نأخذ $\ln 3 \approx 1,1$ و $\ln 2 \approx 0,7$ و $\|i\| = \|j\| = 2cm$)



حل التمرين الرابع:

ملحوظة: تعطى جميع النتائج على شكل كسر .

(1) أ - أبين أن احتمال الحدث A هو $p(A) = \frac{3}{44}$ التجربة سحب ثلاث كرات في آن واحد. ليكن Ω كون الإمكانات المرتبط بها .

$$\text{card } \Omega = C_{12}^3 = \frac{A_{12}^3}{3!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 220$$

$$A = \{RRR; BBB; VVV\}$$

$$\text{card } A = C_3^3 + C_4^3 + C_3^3 = 10 + 4 + 1 + 15$$

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

ب - أحسب $p(\bar{B})$ ثم استنتج $p(B)$.

$$\text{card } \bar{B} = C_9^3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{6} = 3 \times 4 \times 7 = 84 \quad \text{لدينا } \bar{B} = \{\bar{V}\bar{V}\bar{V}\} \text{ لا وجود لأية كرة خضراء في السحبة}$$

$$p(\bar{B}) = \frac{\text{card } \bar{B}}{\text{card } \Omega} = \frac{84}{220} = \frac{21}{55} \quad \text{ومنه } p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{21}{55} = \frac{55 - 21}{55} = \frac{34}{55}$$

(2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات الخضراء المسحوبة.
أ - أتحقق أن القيم التي يأخذها X هي 0 و 1 و 2 و 3

نعتبر الجدول التالي:

نوع السحبة	قيمة X
$\bar{V}\bar{V}\bar{V}$	0
$\bar{V}\bar{V}V$	1
$\bar{V}VV$	2
VVV	3

ومنه قيم X هي: $X(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$ ب - أحدد قانون احتمال X

$$p(X=0) = p(\bar{B}) = \frac{21}{55}$$

$$p(X=1) = \frac{C_9^2 C_3^1}{220} = \frac{36 \cdot 3}{220} = \frac{27}{55}$$

$$p(X=2) = \frac{C_9^1 C_3^2}{220} = \frac{9 \cdot 3}{220} = \frac{27}{220}$$

$$p(X=3) = \frac{C_3^3}{220} = \frac{1}{220}$$